

REVUE DE LA FILIÈRE  
MATHÉMATIQUES  
**RMS**

## Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles

*Les énoncés marqués d'une étoile seront corrigés ultérieurement*

Vous trouverez ci-dessous deux types d'exercices étoilés. Les exercices munis d'une étoile sont réservés aux étudiants, qui y trouveront des questions pas nécessairement plus faciles que celles des exercices doublement étoilés, mais qui ne font appel qu'à peu de connaissances.

Les exercices avec deux étoiles sont, comme d'habitude, ouverts à tous.

Selon la tradition, le comité publiera prioritairement les solutions proposées par les lecteurs, qu'elle souhaite très nombreux.

Le comité de rédaction remercie Walter Appel, Marc Becker, Laurent Bonavero, Olivier Bouverot, Philippe Châteaux, Denis Choimet, Yves Dutrieux, Alexis Fagebaume, Stéphane Flon, Serge Francinou, Jérôme Gartner, Yoann Gentric, Cyril Germain, Hervé Gianella, Gil Guibert, Max Hochart, Adrien Joseph, Denis Jourdan, Thomas Lafforgue, Christelle Larchères, François Lussier, Roger Mansuy, Shalay Mohan, Bruno Morel, François Moulin, Jean Nougayède, Mickaël Prost, Marc Rezzouk, Franz Ridde, Emmanuel Roblet, Christophe Schneider, Cécile Stérin, Brice Touzillier, pour leurs contributions à cette liste d'exercices.

Les lecteurs désirant faire parvenir des solutions d'exercices à la rédaction sont priés de le faire avant le 14 février 2026, de préférence par courrier électronique en pdf et si possible en Tex à l'adresse : [exercices@rms-math.com](mailto:exercices@rms-math.com) .

## Écoles Normales Supérieures – MP – MPI

2. ★★ [SR] Un sous-ensemble non vide  $S$  de  $\mathbb{Z}$  est dit direct si, pour  $x, y, s, t \in S$ , la condition  $x + y = s + t$  implique que  $\{x, y\} = \{s, t\}$ .

a) Les ensembles  $\{1, 3, 6\}$  et  $\{1, 3, 6, 10, 15\}$  sont-ils directs ?

b) Trouvez un ensemble infini direct.

c) Montrer l'existence de deux constantes  $A, B > 0$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

– pour tout ensemble direct  $S$  inclus dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , on ait  $|S| \leq B n^{1/2}$ ,

– il existe un ensemble direct  $S$  inclus dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $A n^{1/3} \leq |S|$ .

d) Existe-t-il un ensemble  $S$  direct inclus dans  $\mathbb{N}$  tel que  $S + S = \mathbb{N}$  ?

e) Existe-t-il un ensemble  $S$  direct inclus dans  $\mathbb{Z}$  tel que  $\mathbb{N}$  soit inclus dans  $S + S$  ?

f) Existe-t-il un ensemble  $S$  direct inclus dans  $\mathbb{Z}$  tel que  $S + S = \mathbb{Z}$  ?

3. ★★ [L] Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 4, u_1 = u_2 = 0, u_3 = 3$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} = u_n + u_{n+1}$ . Montrer que, pour tout nombre premier  $p$ ,  $p$  divise  $u_p$ .

5. ★ [L] On note  $d_n$  le nombre de diviseurs de  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $d_n = O(n^\varepsilon)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

10. ★ [P] Soit  $A$  un anneau tel que tout élément de  $a \in A$  est nilpotent ou idempotent, c'est-à-dire tel que  $a^2 = a$ .

a) Montrer que tout élément de  $A$  est idempotent.

b) Montrer que  $A$  est commutatif.

c) On suppose que  $A$  est fini. Montrer qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A$  soit isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ .

12. ★ [PLSR] Soit  $(A, +)$  un groupe abélien. On dit qu'il est sans torsion lorsque  $n \cdot x \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in A \setminus \{0\}$ . Un ordre de groupe sur  $(A, +)$  est une relation d'ordre totale  $\leq$  sur l'ensemble  $A$  telle que  $\forall (x, y, z) \in A^3, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ .

a) Montrer que si  $(A, +)$  possède un ordre de groupe alors il est sans torsion.

b) Montrer que  $(\mathbb{Z}^n, +)$  possède un ordre de groupe pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que tout sous-groupe de  $\mathbb{Z}^n$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^m$  pour un  $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

16. ★ [PLSR] Soit  $A$  un anneau commutatif.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\Sigma_n(A) = \{c_1^2 + \dots + c_n^2, (c_1, \dots, c_n) \in A^n\}$ .

a) Montrer que  $\Sigma_2(A)$  est stable par multiplication.

b) Est-ce que  $\Sigma_3(A)$  est stable par multiplication quel que soit l'anneau  $A$  envisagé ?

c) On suppose que  $A$  est un corps de caractéristique différente de 2 et que  $n$  est une puissance

de 2. Soient  $c_1, \dots, c_n$  dans  $A$  et  $s = \sum_{k=1}^n c_k^2$ . Montrer qu'il existe une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(A)$

dont la première ligne est  $(c_1 \ \dots \ c_n)$  et qui vérifie  $MM^T = M^T M = sI_n$ .

d) En déduire que  $\Sigma_{2^n}(A)$  est stable par multiplication.

20. ★★ Soient  $f, g \in \mathbb{Q}[X]$  tels que  $f(\mathbb{Q}) = g(\mathbb{Q})$ . Montrer que  $\deg f = \deg g$ .

22. ★ [SR] Soit  $I = \{P \in \mathbb{C}[X] ; \forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \in \mathbb{Z}\}$ . On pose  $H_0 = 1$  et, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$H_n = \frac{X(X-1) \cdots (X-n+1)}{n!}$ . Pour  $P \in \mathbb{C}[X]$ , on pose  $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$  et  $D_n(P) = \Delta^n(P)(0)$ .

- a) Montrer que  $(H_n)_{n \geq 0}$  est une base de  $\mathbb{C}[X]$ .  
 b) Montrer que, pour tout  $n$ ,  $H_n \in I$ .  
 c) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Delta(H_n) = H_{n-1}$ .  
 d) Montrer que  $I \subset \mathbb{Q}[X]$ .  
 e) Montrer que  $I = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i H_i ; n \in \mathbb{N}, (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \right\}$ .  
 f) Soient  $P_1, P_2 \in I$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $P_1(n)$  soit premier avec  $P_2(n)$ . Montrer qu'il existe  $U_1, U_2 \in I$  tels que  $U_1 P_1 + U_2 P_2 = 1$ .

23. ★★ [PLSR] Soit  $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . On note  $C_H = \{M \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}), MH = HM\}$ .

- a) Montrer que  $C_H$  est un sous-groupe infini de  $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ .  
 b) Montrer que  $C_H = \mathbb{Z}[H] \cap \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ , où  $\mathbb{Z}[H] = \{xI + yH, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$ .  
 c) Montrer que  $C_H$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$  et en donner un système de générateurs.

24. ★ [L] Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB = BA$ . Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le signe de  $\det(A^k + B^k)$ .

27. ★★ [P] Soit  $n \geq 2$ . On note  $\mathcal{R}_n$  l'ensemble des matrices  $M$  de  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  telles que  $M\overline{M}$  appartient à  $\mathbb{C}^* I_n$ . On définit une relation d'équivalence  $\sim$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  en posant  $A \sim B$  s'il existe  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tels que  $A = \lambda \overline{M} B M^{-1}$ . Justifier que  $\sim$  induit une relation d'équivalence sur  $\mathcal{R}_n$ . Déterminer les classes d'équivalence sur  $\mathcal{R}_n$ .

28. ★★ [P] On note  $G_n$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\Phi : G_n \rightarrow \mathbb{R}$  une application telle que  $\forall V, W \in G_n, \Phi(V \cap W) + \Phi(V + W) \leq \Phi(V) + \Phi(W)$  et  $\Phi(\{0\}) \geq 0$ . Montrer qu'il existe un unique  $V_0 \in G_n$  de dimension maximale tel que 
$$\inf_{V \in G_n \setminus \{0\}} \frac{\Phi(V)}{\dim V} = \frac{\Phi(V_0)}{\dim V_0}.$$

42. ★★ [L] Déterminer le cardinal minimal  $p$  d'un sous-groupe  $G$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$  tel que  $\text{Vect}(G) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Si  $G_1$  et  $G_2$  conviennent et sont de cardinal  $p$ , sont-ils conjugués ?

43. ★ [L] On dit que la propriété  $MT(n, \mathbb{K})$  est vraie si, pour tout couple  $(A, B)$  de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $A + \lambda B$  soit diagonalisable,  $A$  et  $B$  commutent.

- a) Montrer que, si  $A$  et  $B$  sont dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , diagonalisables et commutent, alors, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $A + \lambda B$  est diagonalisable.  
 b) On suppose que  $n \geq 2$ . La propriété  $MT(n, \mathbb{R})$  est-elle vraie ?  
 c) Montrer que  $MT(2, \mathbb{C})$  est vraie.  
 d) On suppose que  $n \geq 2$ . La propriété  $MT(n, \mathbb{F}_2)$  est-elle vraie ?  
 e) Soit  $p \geq 3$  un nombre premier. La propriété  $MT(2, \mathbb{F}_p)$  est-elle vraie ?

46. ★★ [PLSR] Soient  $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  de rayon de convergence égal à  $+\infty$ .

- a) Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , justifier la définition de  $f^*(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k M^k$ .  
 b) Montrer que  $f^*$  est continue.

c) On suppose que  $f$  est surjective. Montrer que  $f$  induit une surjection de l'ensemble des matrices diagonalisables sur lui-même.

d) On suppose que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , il existe  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $f(z) = \lambda$  et  $f'(z) \neq 0$ . Montrer que  $f^*$  est une surjection de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sur lui-même.

49. ★★ [L] Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes autoadjoints positifs d'un espace euclidien. Montrer que  $v \circ u$  est diagonalisable.

50. ★ [P] Déterminer l'ensemble des symétries linéaires sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  qui fixent un hyperplan et stabilisent l'ensemble  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

51. ★★ [P] Soit  $H = (H_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . On suppose que, pour tous  $i \neq j$ ,  $H_{i,j} \leq 0$ . Si  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on dit que  $i$  et  $j$  sont connectés s'il existe  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $k_1, \dots, k_m \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $k_1 = i$ ,  $k_m = j$  et, pour tout  $\ell \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ ,  $H_{k_\ell, k_{\ell+1}} \neq 0$ .

Montrer que  $i$  et  $j$  sont connectés si et seulement si  $H_{i,j}^{-1} > 0$ , où  $H_{i,j}^{-1}$  est le coefficient d'indice  $(i, j)$  de  $H^{-1}$ .

55. ★★ [PLSR] On pose  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  et  $F = \mathcal{P}_2(V)$  l'ensemble des paires de  $V$ . Soient  $E \subset F$  et  $n_i = |\{j \in V, \{i, j\} \in E\}|$  pour  $i \in V$ . On définit la matrice  $L = (\ell_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par  $\ell_{i,j} = n_i$  si  $i = j$ ,  $-1$  si  $\{i, j\} \in E$  et  $0$  sinon. On note  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  les valeurs propres (avec multiplicité) de  $L$ .

a) Montrer que  $\lambda_1 = 0$ .

b) Montrer que  $\lambda_2 = \min_{X \in \{(1, \dots, 1)\}^\perp \setminus \{0\}} \frac{X^T L X}{X^T X}$ .

c) Pour  $S \subset V$ , on note  $\partial S = \{\{i, j\}, \{i, j\} \in E \text{ avec } i \in S \text{ et } j \notin S\}$ .

Montrer que  $\frac{\lambda_2}{2} \leq \min_{\substack{S \subset V \\ 0 < |S| \leq \frac{n}{2}}} \frac{|\partial S|}{|S|}$ .

60. ★★ [P] Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle forme quadratique sur  $\mathbb{R}^n$  toute application  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle qu'il existe  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$  pour tout  $x =$

$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  tels que  $\{0\}$  et  $\mathbb{R}^n$  sont les seuls sous-espaces de  $\mathbb{R}^n$  stables par tous les éléments de  $G$ . Montrer que les formes quadratiques invariantes par  $G$  constituent une droite vectorielle.

62. ★★ [PLSR] L'espace  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa norme euclidienne canonique et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de la norme subordonnée notée  $\|\cdot\|_{\text{op}}$ . Si  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ , on définit le conditionnement de  $M$  comme le réel  $\text{cond}(M) = \|M\|_{\text{op}} \|M^{-1}\|_{\text{op}}$ .

a) Calculer  $\text{cond}(M)$  dans le cas où  $M$  est symétrique définie positive.

b) Montrer que, pour toute matrice  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{cond}(M) \geq 1$  et  $\text{cond}(M^T) = \text{cond}(M)$ .

c) Que dire des matrices  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telles que  $\text{cond}(M) = 1$ ?

d) Pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{S}_n^{++}$ , montrer que  $\text{Cond}(A+B) \leq \max(\text{Cond}(A), \text{Cond}(B))$ .

65. ★★ [P] Soit  $(O_n)_{n \geq 0}$  une suite d'ouverts non majorés de  $\mathbb{R}^{+*}$ . Montrer qu'il existe  $x \in \mathbb{R}^{+*}$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $O_n \cap \mathbb{N}x$  soit infini.

68. ★★ [P] Soient  $E$  l'espace des suites réelles  $(x_n)_{n \geq 0}$  nulles à partir d'un certain rang, et  $T \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose  $T$  continu pour la norme  $\|\cdot\|_1$  et pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Montrer que  $T$  est continu pour la norme  $\|\cdot\|_2$ .

72. ★★ [P] Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien de dimension infinie et  $K$  une partie bornée de  $E$  dont la frontière est compacte. Montrer que  $K$  est d'intérieur vide dans  $E$ . Peut-on généraliser le résultat à n'importe quel espace vectoriel normé de dimension infinie ?

75. ★ [PLSR] Soient  $E$  un espace vectoriel normé et  $f : E \rightarrow E$  une application telle que  $f(0) = 0$  et  $\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ .

On pose, pour  $x, y \in E, df(x, y) = \left\| \frac{f(x) + f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right\|$ .

a) Montrer que  $\forall x, y \in E, df(x, y) \leq \frac{1}{2} \|x - y\|$ .

b) Montrer que  $f$  est linéaire si et seulement si  $df$  est identiquement nulle.

c) Trouver une fonction vérifiant les propriétés de la fonction  $f$ , non linéaire et non surjective.

d) On suppose que  $f$  est surjective. Montrer que  $f$  est linéaire.

77. ★★ [L] Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On note  $D = \{\ell 2^{-k} + 2^{-k}[0, 1] ; (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2\}$ . Pour tout intervalle  $I$  de  $D$ , on note  $\text{long}(I)$  la longueur de  $I$  et on pose  $M_I(f) = \frac{1}{\text{long}(I)} \int_I f$ . On

pose  $\|f\| = \sup \left\{ \frac{1}{\text{long}(I)} \int_I |f - M_I(f)| ; I \in D \right\}$ .

a) On suppose  $\|f\|$  finie. Soit  $m \in \mathbb{N}^*, (I, J) \in D^2$  avec  $I \subset J$  tels que  $\text{long}(J) = 2^m \text{long}(I)$ . Démontrer que  $|M_I(f) - M_J(f)| \leq 2m \|f\|$ .

b) On suppose que  $\|f\| = 1$  et  $M_{[0,1]}(f) = 0$ .

On note  $F_k = \{I \in D ; I \subset [0, 1], M_I(f) > 5k \text{ et } I \text{ maximal pour cette propriété}\}$ . On pose

$\Omega_k = \bigcup_{I \in F_k} I$  et  $\text{long}(\Omega_k) = \sum_{I \in F_k} \text{long}(F_I)$ .

Montrer que, pour  $k \geq 1, \text{long}(\Omega_k) \leq \frac{1}{3} \text{long}(\Omega_{k-1})$ .

78. ★★ [PLSR] On munit les espaces  $\ell_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{R})$  et  $\ell_{\mathbb{Z}}^2(\mathbb{R})$  de leurs normes usuelles  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$ .

On pose  $H = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} ; \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n^2 (1 + n^2) < +\infty \right\}$ .

a) Définir un produit scalaire sur  $H$ . Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

b) Quelles inclusions a-t-on entre  $\ell_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{R}), \ell_{\mathbb{Z}}^2(\mathbb{R})$  et  $H$  ? Montrer que ces inclusions sont continues (i.e. les injections canoniques sont continues).

c) Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ . Montrer que  $u \in H$  si et seulement si l'application  $\mu_u : H \rightarrow H$  définie par  $\forall v \in H, \mu_u(v) = u * v$  avec  $(u * v)_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$  est bien définie et continue.

79. ★★ [P] On note  $\ell^1$  l'ensemble des suites sommables de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On munit  $\ell^1$  de la norme définie, pour  $u = (u_n)_{n \geq 0}$ , par  $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ .

Soient  $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\ell^1$  et  $u \in \ell^1$ . Montrer l'équivalence entre :

i) la suite  $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $u$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$ ,

ii) pour toute suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n u_n^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n u_n$ .

83. ★ [PLSR] **a)** Déterminer la nature des séries  $\sum \frac{\sin n}{n}$ ,  $\sum \frac{\sin^2 n}{n}$ ,  $\sum \frac{|\sin n|}{n}$ .
- b)** Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  et  $Q \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'il existe  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$  tels que  $|qx - p| \leq \frac{1}{Q}$ .  
En déduire qu'il existe une infinité de couples  $(p, q)$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tels que  $\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$ .
- c)** On admet que  $\pi$  est irrationnel. Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{1}{n \sin(n)}$ .

85. ★ [L] **a)** Pour quels réels  $s$  la somme  $\sum_{\substack{n, m \in \mathbb{N}^* \\ n \neq m}} \frac{|n - m|^s}{nm(n^2 - m^2)^2}$  est-elle finie ?
- b)** Pour  $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ , on note  $|n| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$ .  
Pour quels réels  $s$  la somme  $\sum_{\substack{(n, m) \in (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\})^2 \\ n \neq m}} \frac{|n - m|^s}{|n||m|(1 + (|n| - |m|)^2)}$  est-elle finie ?

86. ★ [PLSR] On note  $S$  l'ensemble des suites croissantes à termes dans  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

- a)** Pour  $a \in S$ , montrer que  $\varphi(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \prod_{k=0}^n \frac{1}{a_k} \right)$  appartient à  $]0, 1]$ .
- b)** Montrer que  $\varphi$  définit une bijection de  $S$  sur  $]0, 1]$ .
- c)** Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a \in S$  pour que  $\varphi(a) \in \mathbb{Q}$ .

91. ★ [P] Trouver les  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$ .

93. ★ [SR] Pour  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , on pose  $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ .

- a)** Calculer  $B_n(u_1)$  et  $B_n(u_2)$  où  $u_n : x \mapsto x^n$ .
- b)** Montrer que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $\sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$ .
- c)** En déduire que si  $f$  est  $M$ -lipschitzienne, alors  $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}$  pour tout  $x$ .

94. ★ [L] Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

- $f$  est croissante, à valeurs dans  $[0, 1]$ ,  $f$  est continue à droite,
- $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ ,
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists b_k \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)^k = f(x + b_k)$ .

97. ★★ [L] Une partie  $E$  de  $[0, 1]$  est dite négligeable si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  d'intervalles de  $[0, 1]$  dont la réunion contient  $X$  et dont la somme des longueurs est majorée par  $\varepsilon$ . Soit  $f$  une fonction dérivable de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe une partie négligeable  $E$  de  $[0, 1]$  telle que, pour tout  $x \in [0, 1] \setminus E$ , on ait  $f'(x) \geq 0$ . Montrer que  $f$  est croissante.

98. ★ [P] Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(P_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  et  $(Q_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  deux familles de polynômes réels,  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sum_{k=1}^n P_k(x) e^{Q_k(x)}$ . Montrer que, si  $f$  n'est pas identiquement nulle, alors  $f$  ne possède qu'un nombre fini de zéros.

100. ★★ [P] Soit  $(a_k)_{k \geq 1}$  une suite décroissante de réels positifs telle que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $ka_k \leq (k+1)a_{k+1}$ . Montrer que  $\int_0^\pi \max_{1 \leq k \leq n} \left( a_k \frac{|\sin(kx)|}{x} \right) dx = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} + O(1)$ .

101. ★ [PLSR] Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ .

a) Quelle est la limite de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ? Déterminer la vitesse de convergence.

b) On suppose désormais  $f$  1-périodique et de classe  $C^2$ . Montrer qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall n \geq 1, \left| S_n - \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \frac{C}{n^2}$ .

c) On suppose désormais  $f$  1-périodique et de classe  $C^3$ . Montrer qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall n \geq 1, \left| S_n - \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \frac{C}{n^3}$ .

d) Que dire si  $f$  est 1-périodique et de classe  $C^\infty$ ?

102. ★★ [P] Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ ,  $f$  une fonction continue de  $[a, b] \times [-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , soit  $I(\lambda) = \int_a^b f(t, \sin(\lambda t)) dt$ . Montrer que  $I(\lambda)$  admet une limite que l'on déterminera lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

103. ★ [SR] Soient  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N$ . Pour  $y \in \mathbb{R}$ , on note  $e(y) = e^{2i\pi y}$ .

Soit  $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^N x_n e(nt)$ . Soient  $R \in \mathbb{N}^*$  et  $(t_1, \dots, t_R) \in \mathbb{R}^R$ .

a) i) Montrer que  $\sum_{r=1}^R |f(t_r)|^2 \leq NR \sum_{k=1}^N |x_k|^2$ .

ii) Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

b) Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $\Delta(t) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |n - t|$ . On suppose les  $t_i$  distincts. Soit  $\delta > 0$  tel que

$\delta \leq \min_{1 \leq i \neq j \leq R} \Delta(t_i - t_j)$ . Montrer que  $\sum_{r=1}^R |f(t_r)|^2 \leq (2N\pi + \delta^{-1}) \sum_{k=1}^N |x_k|^2$ .

Ind. On pourra montrer que, pour une fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ ,

$$|g(a)| \leq \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} |g(t)| dt + \frac{1}{2} \int_{a-h}^{a+h} |g'(t)| dt.$$

107. ★★ [PLSR] Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne. On suppose qu'il existe  $R > 0$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$ ,  $f(x) = 0$ .

a) Montrer que  $\varepsilon \mapsto \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  admet une limite en  $0^+$ .

On note  $\text{vp} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right)$  cette limite.

**b)** On note  $T_f : x \mapsto \int_{-\infty}^x f(y) \ln |y - x| dy + \int_x^{+\infty} f(y) \ln |y - x| dy$ . Justifier que  $T_f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

**c)** On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que  $T_f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (T_f)'(x) = \text{vp} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y+x)}{y} dy \right).$$

120. ★★ [L] Soient  $\alpha, \theta \in ]0, 1[$ . Pour  $f : [1, +\infty[ \rightarrow [0, 1]$  continue, on pose  $\|f\|_\alpha = \sup_{s \geq 1} s^\alpha |f(s)|$  et  $F_\alpha = \{f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, [0, 1]), \|f\|_\alpha < +\infty\}$ .

**a)** Pour  $f \in F_\alpha$ , on pose

$$T(f) : s \geq 1 \mapsto 1 - \left(1 - \frac{1}{s}\right)^\theta + \theta(s-1)^\theta \int_1^{+\infty} (s+t-1)^{-\theta-1} f(t) dt.$$

Montrer que  $T$  est une application lipschitzienne de  $F_\alpha$  dans  $F_\alpha$  (pour  $\|\cdot\|_\alpha$ ).

**b)** On admet que, pour tout  $\alpha \in ]0, 1 - \theta[$ ,  $T$  possède un unique point fixe  $f_\alpha \in F_\alpha$ . Montrer que  $f_\alpha$  ne dépend pas de  $\alpha$ ; on le note  $f_0$ . Montrer que  $\int_1^{+\infty} t^{-\theta} f_0(t) dt = +\infty$ .

126. ★★ [P] Soit  $n \geq 2$ . Soit  $A : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  continue. On considère les solutions de l'équation différentielle  $(*) : x'(t) = A(t)x(t)$ .

**a)** On suppose qu'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $D : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  continue et à valeurs dans l'ensemble des matrices diagonales à coefficients dans  $]-\infty, -1]$  telles que, pour tout  $t$ ,  $A(t) = P D(t) P^{-1}$ . Les solutions de  $(*)$  ont-elles toutes pour limite 0 en  $+\infty$ ?

**b)** On suppose qu'il existe  $P : \mathbb{R}^+ \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$  continue et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonale à coefficients dans  $]-\infty, -1]$  telles que, pour tout  $t$ ,  $A(t) = P(t) D P^{-1}(t)$ . Les solutions de  $(*)$  ont-elles toutes pour limite 0 en  $+\infty$ ?

128. ★★ [PLSR] Soit  $\mu \in \mathbb{R}^+$ . On considère  $(E_\mu) : y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0$ .

**a)** Résoudre  $(E_0)$ .

**b)** Soient  $x_0$  et  $x_1$  deux fonctions bornées et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $\omega_1 \in \mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe des fonctions  $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\varepsilon : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivables par rapport à la seconde variable telles que :

**i)**  $\omega(\mu) \underset{\mu \rightarrow 0}{=} 1 + \omega_1 \mu + o(\mu)$ ;

**ii)** il existe  $C : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  croissante telle que

$$\forall k \in \{0, 1, 2\}, \forall (\tau, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, |(\partial_2)^k \varepsilon(\tau, \mu)| \leq C(\tau) \mu^2;$$

**iii)** pour  $x : (\tau, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \varepsilon(\tau, \mu)$ , la fonction  $t \mapsto x(\omega(\mu)t, \mu)$  est solution de  $(E_\mu)$  sur  $\mathbb{R}^+$  pour  $\mu$  voisin de 0.

Calculer alors  $\omega_1$  et donner une expression explicite de  $x_0$  et  $x_1$  en fonction de quelques constantes inconnues.

129. ★★ [L] Soit  $A$  une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $X$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X'(t) = A(t)X(t) - X(t)A(t)$ . Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X(t)$  est semblable à  $X(0)$ .

131. [P] ★★ Soient  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soit  $L \geq \ell > 0$  des réels. On suppose qu'en tout point de  $\mathbb{R}^d$  la hessienne de  $f$  a son spectre inclus dans  $[\ell, L]$ . Soit  $\tau \in ]0, 2/L[$  ainsi qu'une suite  $u$  à termes dans  $\mathbb{R}^d$  vérifiant la relation de récurrence  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \tau \nabla f(u_n)$ . Montrer que  $u$  converge.

137. ★★ [P] Soient  $a, b, c, d$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$ . Quelle est l'aire maximale d'un quadrilatère dont les côtés successifs ont pour longueurs  $a, b, c, d$ ?

144. ★ [L] Montrer qu'il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $n \geq 1$  et tout  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \{\pm 1\}^{n^2}$ , il existe  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$  dans  $\{\pm 1\}^n$  tels que  $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i y_j \geq C n^{3/2}$ .

146. ★ [P] Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ . Soit  $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$  un ensemble de cardinal  $n$ . Soient  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur  $S_n$ . Si  $i, j \in [1, n]$ , on pose  $e_i \star e_j = e_{\sigma_i(j)}$ . Montrer que la probabilité que  $(E, \star)$  soit un groupe, sachant que  $\star$  admet un neutre, tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

147. ★★ [L] Soient  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $(e_1, \dots, e_d)$  la base canonique de  $\mathbb{Z}^d$ . Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires indépendantes telles que  $\mathbf{P}(X_n = e_i) = \mathbf{P}(X_n = -e_i) = \frac{1}{2d}$  pour  $1 \leq i \leq d$ . On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et  $S_0 = 0$ . Soit  $T = \inf\{n > 0, S_n = 0\}$  et  $p_d = \mathbf{P}(T < +\infty)$ . On admet que  $p_d < 1$  pour  $d \geq 3$ . Montrer que  $p_d \rightarrow 0$  lorsque  $d \rightarrow +\infty$ .

154. ★★ [P] On considère  $n$  variables aléatoires de Rademacher indépendantes  $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Montrer que, pour tout réel  $p > 0$ , il existe  $(c_p, C_p) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$  indépendant de  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ,  $c_p \left( \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \mathbf{E} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i z_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p \left( \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ .

155. ★ [L] Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X_n = -k) = c e^{-|k|}$  où  $c$  est à déterminer. Déterminer la loi du rayon de convergence de la série entière aléatoire  $\sum X_n z^n$ .

157. ★★ [L] Montrer qu'il existe un réel  $c > 0$  vérifiant la condition suivante : quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , quelle que soit  $S$  partie non vide de  $\mathbb{U}_n$ , il existe un entier naturel  $p \leq \frac{cn}{|S|}$  ainsi

qu'une  $p$ -liste  $(z_1, \dots, z_p)$  d'éléments de  $\mathbb{U}_n$  telle que  $\left| \bigcup_{k=1}^p z_k S \right| \geq \frac{n}{2}$ .

162. ★★ [L] Soient  $E$  une partie bornée et au plus dénombrable de  $\mathbb{R}^+$ , et  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  deux lois de probabilité sur  $E$ . Déterminer, en fonction de ces lois, la plus petite constante  $K_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}$  telle que, pour tout couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires réelles à valeurs dans  $E$  telles que  $X \sim \mathcal{L}$  et  $Y \sim \mathcal{L}'$ , on ait l'inégalité  $\mathbf{E}(XY) \leq K_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}$ .

163. ★ [SR] On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  un vecteur aléatoire tel que  $\mathbf{E}(\|X\|^2) < +\infty$ . On note  $C(X) = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq n}$  la matrice de covariance.

- a) Que dire de  $C(X)$  si les  $X_i$  sont indépendantes ?  
 b) Soient  $v \in \mathbb{R}^n$  et  $Y = \langle v, X \rangle$ . Exprimer  $V(Y)$  en fonction de  $C(X)$ .  
 c) On suppose les  $X_i$  centrées. Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $Z = AX$ . Exprimer  $E(\|Z\|^2)$  en fonction de  $C(X)$ .  
 d) Caractériser les  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  pour lesquelles il existe un vecteur aléatoire  $X$  tel que  $A = C(X)$ .  
 e) Soit  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ .  
 Montrer que  $P(X \in H) = 1$  si et seulement si  $H^\perp \subset \text{Ker}(C(X))$ .

### Écoles Normales Supérieures – PSI

182. ★ a) Calculer  $\int_0^1 -\frac{\ln(1-t)}{t} dt$ . On donne  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .  
 b) Soient  $x \in [0, 1]$  et  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $0 < a < b$ . Montrer que l'équation  $y^a - y^b = x^a - x^b$  d'inconnue  $y$  admet deux solutions, sauf pour une valeur  $x_0$  de  $x$  que l'on déterminera.  
 c) Soit  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x_0) = x_0$  et, pour  $x \neq x_0$ ,  $f(x)$  est l'unique solution différente de  $x$  de l'équation  $y^a - y^b = x^a - x^b$ . Montrer que  $f$  est décroissante et continue.  
 d) Soit  $x \in ]0, 1[$ . Montrer que l'équation  $x^{b-a} = \frac{1-t^a}{1-t^b}$  admet une unique solution  $t \in ]0, 1[$ . On la note  $g(x)$ .  
 e) Calculer  $I = \int_0^1 -\frac{\ln(f(x))}{x} dx$ . On utilisera le changement de variable  $t = g(x)$ .
188. ★ Soit  $n \geq 2$ . On se place dans  $\mathbb{N}^2$  et on considère le rectangle  $[0, n] \times [0, 2]$ . On appelle recouvrement de  $[0, n] \times [0, 2]$  tout ensemble fini formé de rectangles translatés de  $[0, 1] \times [0, 2]$  (rectangles verticaux) et de  $[0, 2] \times [0, 1]$  (rectangles horizontaux) qui recouvrent  $[0, n] \times [0, 2]$  sans que leurs intérieurs ne se chevauchent.  
 On note  $u_n$  le nombre de recouvrements de  $[0, n] \times [0, 2]$ . On munit l'ensemble des recouvrements de  $[0, n] \times [0, 2]$  de la probabilité uniforme.  
 a) Calculer  $u_1, u_2, u_3$ . Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ . En déduire une expression de  $u_n$ .  
 b) On note  $P_{1,n}$  la probabilité qu'il y ait un rectangle vertical tout à gauche. Calculer  $P_{1,n}$  et montrer que  $(P_{1,n})$  admet une limite  $L$ .  
 c) On note  $V_n$  le nombre de rectangles verticaux. Calculer  $E(V_n)$ .  
 Ind. On pourra écrire  $V_n = \sum_{i=1}^n U_{i,n}$  où  $U_{i,n}$  est l'indicatrice de l'événement : « il y a un rectangle vertical en position  $i$  ».  
 d) Montrer que  $\frac{E(V_n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L$ .  
 Ind. Découper la somme entre  $[1, \sqrt{n}]$ ,  $[\sqrt{n}, n - \sqrt{n}]$  et  $[n - \sqrt{n}, n]$ .  
 e) On note  $V_{i,j,n}$  l'événement : « il y a un rectangle vertical en  $i$  et en  $j$  ». Calculer  $E(V_{i,j,n})$ .  
 f) Calculer  $V(V_n)$ , puis en donner un équivalent quand  $n \rightarrow +\infty$ .

## Écoles Normales Supérieures – PC

230. ★ Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de dimension 4 de  $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On note  $L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'espace des fonctions bornées et  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'espace des fonctions de carré intégrable.

a) On suppose qu'il existe un sous espace vectoriel  $G$  de  $E$  constitué de fonctions bornées sur  $\mathbb{R}^+$  tel que  $E = \text{Vect}(x \mapsto e^x) + \text{Vect}(x \mapsto e^{-x}) + G$  et que la seule fonction dans  $G$  qui soit de carré intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  est la fonction nulle. Montrer que  $E \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{0\}$ .

b) On suppose que  $E$  vérifie les hypothèses de la question a) et qu'on dispose de deux sous-espaces  $F_1$  et  $F_2$  de  $E$  tels que  $\dim F_1 = \dim F_2 = 2$ , que toutes les fonctions de  $F_1$  sont bornées sur  $\mathbb{R}^-$ , et que la seule fonction de  $F_2$  bornée sur  $\mathbb{R}^-$  est la fonction nulle.

Montrer que  $\dim(E \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = 1$ .

232. ★ a) Soient  $f$  une fonction développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et  $J$  une partie finie de  $\mathbb{N}$ .

On suppose que  $f^{(i)}(0) = 0$  si  $i \notin J$  et  $f^{(i)}(1) = 0$  si  $i \in J$ . Que dire de  $f$ ?

b) La propriété est-elle encore vérifiée si  $J$  est une partie infinie de  $\mathbb{N}$ ?

## École Polytechnique – MP

268. ★★ Soit  $f = \sum_{k=0}^n c_k X^k$  un polynôme de degré  $n$  à coefficients entiers et dont toutes les racines complexes appartiennent à  $\mathbb{Q}^*$ . On pose  $H = \max(|c_0|, \dots, |c_n|)$ .

a) Montrer que pour le complexe  $i$  on a  $|f(i)|^2 \leq H^2 \left( \frac{n^2}{2} + n + 1 \right)$ .

b) Montrer que  $|f(i)|^2 \geq 2^n$ .

c) En déduire que si  $n \geq 10$  alors  $n \leq 5 \log_2(H)$ .

270. ★ Soient  $A$  et  $B$  appartenant à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $k = \dim \text{Ker}(AB)$ . Quelles sont les valeurs possibles pour la dimension de  $\text{Ker}(BA)$ ?

274. ★★ Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$ . Soit  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{L}(E)$ ,  $c = u \circ v - v \circ u$ , on suppose  $\text{rg } c = 1$ .

a) Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $c$  est égale à  $E_{n-1,n}$ .

b) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u^k(\text{Im } c) \subset \text{Ker } c$ .

c) Montrer que  $\chi_u$  n'est pas irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$ .

d) Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  non trivial tel que  $u(F) \subset F$ . Montrer que  $\chi_u$  n'est pas irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$ . Étudier la réciproque.

279. ★ Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$\mathcal{IA} = \sup \{r \in \mathbb{N}; \exists A_1, \dots, A_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall i, A_i^2 = I_n \text{ et } \forall i \neq j, A_i A_j = -A_j A_i\}.$$

a) Si  $n$  est impair, montrer que  $\mathcal{IA}(n) = 1$ .

b) Soient  $s, t \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\mathcal{IA}(2^s(2t+1)) = 2s+1$ .

281. ★★ Soient  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $G$  un sous-groupe de  $\text{GL}(V)$ .

a) On suppose que  $G = \text{GL}(V)$ . Que vaut  $\text{Vect}(G)$ ? La réciproque est-elle vraie?

On suppose maintenant que, pour tout  $g \in G$ ,  $g - \text{id}$  est nilpotent.

**b)** Quels sont les éléments diagonalisables de  $G$ ?

**c)** On suppose que  $G$  est fini et que  $\text{Vect}(G) = \mathcal{L}(V)$ . Quelle est la dimension de  $V$ ?

**d)** Si  $G$  n'est plus fini mais que  $\text{Vect}(G) = \mathcal{L}(V)$ , quelle est la dimension de  $V$ ?

282. **★ a)** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . Soit  $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$  une matrice complexe dont les valeurs propres sont de module strictement inférieur à  $R$ . Montrer que  $\sum a_n M^n$  converge.

**b)** Existe-t-il une série entière  $\sum a_n z^n$  de rayon de convergence  $R > 0$  telle que, pour toute matrice  $M$  à spectre inclus dans  $\overline{D(0, R)}$  et admettant une valeur propre de module  $R$ , la série  $\sum a_n M^n$  diverge?

**c)** Existe-t-il une série entière  $\sum a_n z^n$  de rayon de convergence  $R > 0$  telle que, pour toute matrice  $M$  à spectre inclus dans  $\overline{D(0, R)}$  admettant une valeur propre de module  $R$ , la série  $\sum a_n M^n$  converge?

**d)** Soit  $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

On pose  $f^{(k)} : z \mapsto \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n z^n$ .

Soit  $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$  de polynôme caractéristique  $\chi_M = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$  où les  $\lambda_i$  sont distincts

et de module  $< R$  et les  $\alpha_i$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

**i)** Montrer l'existence de  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, \alpha_i - 1 \rrbracket, f^{(k)}(\lambda_i) = P^{(k)}(\lambda_i)$ .

**ii)** On suppose que  $M$  est diagonalisable. Montrer que  $f(M) = P(M)$ .

**iii)** Est-ce toujours le cas si on ne suppose plus  $M$  diagonalisable?

296. **★★** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que tout convexe non borné contient au moins une demi-droite. On pourra commencer par le cas d'un convexe fermé.

297. **★★** Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , soit  $R_k$  la borne inférieure de l'ensemble  $E_k$  des  $r \in \mathbb{R}^{+*}$  tels qu'il existe une boule fermée de  $\mathbb{R}^2$  euclidien de rayon  $r$  contenant au moins  $k$  points de  $\mathbb{Z}^2$ .

**a)** Calculer  $R_k$  pour  $k = 2, 3, 4$ .

**b)** Si  $k \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $R_k$  est le minimum de  $E_k$ .

**c)** Montrer que, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $4R_k^2$  est entier.

**d)** Donner un équivalent de  $R_k$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ .

1. **★★** Soit  $E$  l'espace des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On munit  $E$  de la norme  $\| \cdot \|_\infty$ . Déterminer les formes linéaires continues  $\varphi$  sur  $E$  telles que, pour tout  $(f, g) \in E^2$  tel que  $\varphi(fg) = 0$ , on ait  $\varphi(f) = 0$  ou  $\varphi(g) = 0$ .

298. ★★ Soit  $E$  l'espace des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On munit  $E$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Déterminer les formes linéaires continues  $\varphi$  sur  $E$  telles que, pour tout  $(f, g) \in E^2$  tel que  $\varphi(fg) = 0$ , on ait  $\varphi(f) = 0$  ou  $\varphi(g) = 0$ .

299. ★★ Soit  $\rho : [0, 1] \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  continue telle que, pour tout  $t$ ,  $\rho(t)^2 = \rho(t)$ .

a) Montrer que  $t \mapsto \operatorname{rg} \rho(t)$  est constante.

b) Montrer l'existence de  $u \in \mathcal{C}^0([0, 1], \operatorname{GL}_n(\mathbb{C}))$  telle que  $\forall t, \rho(t) = u(t)\rho(0)u^{-1}(t)$ .

c) On suppose de plus que  $\rho(1) = \rho(0)$ . Montrer que l'on peut choisir  $u$  de sorte que l'on ait aussi  $u(0) = u(1)$ .

301. ★★ On munit  $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe un unique  $T_n \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $n$  tel que  $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ .

Soit  $(a_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$  telle que  $\sum a_n$  converge.

b) Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_{3^n}(x)$ .

i) Montrer que  $f$  est bien définie et continue sur  $[-1, 1]$ .

ii) Montrer que  $d(f, \mathbb{R}_{3^n}[X]) = \inf_{P \in \mathbb{R}_{3^n}[X]} \|f - P\|_\infty = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ .

Ind. On pourra considérer les points  $x_k = \cos(\pi(1 + k3^{-n-1}))$  pour  $k \in [0, 3^{n+1}]$ .

304. ★ [MPI] Soient  $a < b$  réels et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle telle que, pour tout  $t \in [a, b]$ , il existe une suite  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers tels que  $tu_n - k_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers 0.

305. ★★ Soient  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $\beta = 1/\alpha$ . Soit  $(z_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $z_0 = 1$  et, pour tout

$$n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{\alpha n + 1}{\alpha(n+1)} z_n.$$

a) Donner un équivalent de  $z_n$  et sa valeur exacte lorsque  $\beta \in \mathbb{N}^*$ .

b) Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle.

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k$  et  $y_n = \alpha x_n + (1 - \alpha)\mu_n$ . On suppose que  $y_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $x_n \rightarrow x$ .

318. ★ Soient  $M, m \in \mathbb{R}$  avec  $0 < m < M$ ,  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, [m, M])$ ,  $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ . Soit

$$(*) \text{ l'équation fonctionnelle } \forall t \in \mathbb{R}, g(t) = 1 + \frac{g(qt)}{f(t)}.$$

a) On suppose  $m > 2$  ou  $M < 1/2$ . Montrer qu'il existe une unique solution bornée de  $(*)$ .

b) Montrer que les solutions bornées de  $(*)$  ne s'annulent pas.

323. ★★ Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres premiers.

$$\text{On pose } \Psi(x) = \sum_{\substack{p \in \mathcal{P}, \alpha \in \mathbb{N}^* \\ p^\alpha \leq x}} \ln p \text{ et } T(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

a) Montrer que  $T(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \ln(n) = x \ln(x) - x + O(\ln x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

**b)** Montrer que  $T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n \leq x} (-1)^{n-1} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) = x \ln 2 + O(\ln x)$ .

339. ★ **a)** On fixe un entier  $d \geq 0$ . Soit  $(c_k)_{k \leq d}$  une famille de nombres complexes indexée par  $\mathbb{Z}_{\leq d} = \{k \in \mathbb{Z}, k \leq d\}$ . On suppose qu'il existe un réel  $R > 0$  telle que  $(c_k z^k)_k$  soit sommable pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > R$ ; pour un tel  $z$ , on pose  $g(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\leq d}} c_k z^k$ . On

suppose enfin que  $c_1, \dots, c_d$  sont tous rationnels et que  $g(a) \in \mathbb{Z}$  pour une infinité d'entiers  $a$ . Montrer que  $c_0 \in \mathbb{Q}$  et  $c_k = 0$  pour tout  $k < 0$ .

**b)** Soit  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $P \in \mathbb{C}[X]$ . On suppose que, pour tout entier  $n$  assez grand,  $P(n)$  est la puissance  $s$ -ième d'un entier. Soient  $\tau_1, \dots, \tau_s$  dans  $\mathbb{Z}$ . Montrer qu'il existe une fonction  $g$  vérifiant les hypothèses de la question précédente (pour un certain  $d$ ) et telle que, pour tout complexe  $z$  de module assez grand,  $\prod_{k=1}^s P(z + \tau_k) = g(z)^s$ . En déduire qu'il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P = Q^s$  et  $\forall k \in \mathbb{Z}, Q(k) \in \mathbb{Z}$ .

344. ★★ Soit  $E$  l'ensemble des fonctions  $y$  de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  telles que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+, y''(t) + e^t y(t) = 0$ . Soit  $y \in E \setminus \{0\}$ .

**a)** Montrer que les zéros de  $y$  sont isolés.

**b)** Montrer que les zéros de  $y$  peuvent être rangés en une suite strictement croissante  $(t_n)_{n \geq 0}$  tendant vers  $+\infty$ .

**c)** Donner un équivalent de  $t_n$ .

354. ★★ Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ . On suppose de plus que  $\mathbf{E}(X_1^2) < +\infty$ , et on pose  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  et  $T_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{S_i}$  pour  $n \geq 1$ .

**a)** Montrer que, pour tout  $\omega$ ,  $(T_n(\omega))_{n \geq 1}$  a une limite dans  $[0, +\infty]$ .

**b)** Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  et une suite strictement croissante  $(n_k)_{k \geq 1}$  d'entiers  $\geq 1$  vérifiant  $n_{k+1} \geq 2n_k$  et  $\mathbf{P}(S_{n_k} \geq 2n_k \mathbf{E}(X_1)) \leq \frac{C}{2^k}$  pour tout  $k \geq 1$ .

**c)** En déduire que  $(T_n)_{n \geq 1}$  tend presque sûrement vers  $+\infty$ .

**d)** Montrer que  $\mathbf{V}(T_n) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left(\frac{1}{S_i^2}\right)$  pour tout  $n \geq 1$ .

360. ★★ Soient  $X$  une variable aléatoire à support fini à valeurs dans  $\mathbb{Z}^2$  et telle que  $-X \sim X$ ,  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de  $X$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

**a)** Montrer que, si  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbf{E}(\|S_n\|^2) = n \mathbf{E}(\|X\|^2)$  et  $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{P}(S_n = x)^2$ .

**b)** Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}^{+*}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(S_{2n} = 0) \geq \frac{c}{n}$ .

**c)** Démontrer que  $\mathbf{P}(\exists n \geq 1, S_n = 0) = 1$ .

### École Polytechnique - ESPCI – PC

422. ★ Soient  $(c_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  et  $f : x \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i$ . Montrer que, si  $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}$ , alors  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  est irrationnel.

426. ★ Montrer que :  $\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} \geq \ln x + O(1)$ . Ind. Considérer  $\ln(n!)$ .

448. ★ Soit  $n \geq 2$ . On pose  $\Sigma = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^n a_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1 \right\}$ . Maximiser  $S_n = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1$  lorsque  $(a_1, \dots, a_n)$  décrit  $\Sigma$ .

### Mines - Ponts – MP

480. ★ On fixe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Montrer que l'équation  $(E_n) : \tan(y) = 2n \tan(y/2n)$  possède au moins  $n - 1$  solutions dans  $]0, n\pi[$ .

b) Expliciter deux polynômes  $A, B$  à coefficients réels tels que  $\tan(2nt) = \frac{A(\tan t)}{B(\tan t)}$  pour tout réel  $t$  tel que  $\tan t$  et  $\tan(2nt)$  soient définis.

c) Mettre en évidence un polynôme  $P$  tel que les solutions de  $(E_n)$  soient les solutions de  $P(1/\tan^2(y/2n)) = 0$ .

d) Dénombrer les solutions de  $(E_n)$  dans  $]0, n\pi[$ .

518. ★ Déterminer les applications  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que, pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  et toute  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ , on ait  $f(PX) = Pf(X)P^{-1}$ .

556. ★★ Soient  $\mathbb{K}$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ ,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

a) On suppose que  $u$  est nilpotent d'indice  $p$ .

i) Montrer que  $p = n$  si et seulement si  $\dim \text{Ker } u = 1$ .

ii) Montrer que  $p = n$  si et seulement si  $u$  possède un nombre fini de sous-espaces stables.

b) On revient au cas général. Montrer que  $u$  possède un nombre fini de sous-espaces stables si et seulement si  $\deg \pi_u = n$ .

566. ★★ Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

a) Montrer que, pour  $r \in \mathbb{R}^{+*}$  assez grand,  $(re^{it}I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{r^{k+1}e^{i(k+1)t}}$ .

b) Montrer que, pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$  et tout  $r > 0$  assez grand,

$$P(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} re^{it} P(re^{it})(re^{it}I_n - A)^{-1} dt.$$

c) En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

594. ★ Déterminer les applications  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que, pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  et toute  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ , on ait  $f(PX) = Pf(X)P^{-1}$ .

602. ★★ *a)* Soient  $U, V \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  tel que  $U = R^2$  et en déduire  $\text{tr}(UV) \geq 0$ .

*b)* Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dérivable et  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer que :  $\alpha : t \mapsto \text{tr} P(f(t))$  est dérivable et calculer  $\alpha'$ .

*c)* Soient  $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  telles que  $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer que :  $\text{tr}(e^A) \leq \text{tr}(e^B)$ .

667. ★ Soit  $f \in \mathcal{D}^3(\mathbb{R})$ , telle que  $ff^{(3)} = 0$ .

*a)* Montrer que si  $f'$  est strictement monotone sur un intervalle  $I$ ,  $f$  prend au plus deux fois chaque valeur sur  $I$ .

*b)* Soit  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}, f''(x) = 0\}$ . Montrer que si  $\Gamma \neq \emptyset$ , alors  $\Gamma$  n'est ni majoré, ni minoré.

*c)* Montrer que  $\Gamma$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Caractériser  $f$ .

800. ★★ Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

*a)* On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Montrer que sa jacobienne  $J_f(x)$  est antisymétrique pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  si et seulement s'il existe  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $b \in \mathbb{R}^n$  tels que  $f(x) = Ax + b$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*b)* On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que sa jacobienne  $J_f(x)$  est symétrique pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  si et seulement s'il existe  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $f = \nabla g$ .

### Mines - Ponts – PSI

939. ★ Déterminer toutes les fonctions continues  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que l'équation différentielle  $y''(x) + y'(x) + f(x)y(x) = 0$  admette une base de l'ensemble des solutions de la forme  $(g^2, g)$ , où  $g$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ .

### Mines - Ponts – PC

960. ★ Calculer  $\min_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{\sigma(i)}{i} \right\rfloor$

983. ★ Soit  $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ . Montrer que  $\text{rg}(ABC) + \text{rg}(B) \geq \text{rg}(AB) + \text{rg}(BC)$ .

990. ★ Soient  $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $\det(A) = \det(B) = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$ . Montrer que  $\forall x, y \in \mathbb{R}, \det(xA + yB) = 0$ .

### Centrale I – MP - MPI

1191. ★★ Soient  $E$  un espace euclidien et une partie finie  $\mathcal{R}$  de  $E \setminus \{0\}$  telle que :

- $\mathcal{R}$  engendre  $E$ ,
- pour tout  $\alpha \in \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}$  est stable par la réflexion  $s_\alpha$  par rapport à l'hyperplan de vecteur normal  $\alpha$ ,
- pour tout  $\alpha \in \mathcal{R}$ , les seuls vecteurs colinéaires à  $\alpha$  dans  $\mathcal{R}$  sont  $\alpha$  et  $-\alpha$ ,
- pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^2$ ,  $n_{\alpha, \beta} = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2} \in \mathbb{Z}$ .

a) Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^2$ .

i) Donner la définition de la réflexion  $s_\alpha$  ainsi que son expression analytique.

ii) Calculer  $n_{\alpha, \beta} n_{\beta, \alpha}$  en fonction de  $\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|}$ .

iii) On suppose  $\alpha, \beta$  non colinéaires et tels que  $n_{\alpha, \beta} > 0$ . Montrer que  $n_{\alpha, \beta} = 1$  ou  $n_{\beta, \alpha} = 1$ .

b) On munit  $E$  d'un ordre total  $\leq$  qui respecte :

$$- \forall (x, y, z) \in E^3, x \leq y \implies x + z \leq y + z,$$

$$- \forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}^+, x \leq y \implies \lambda x \leq \lambda y.$$

On note  $\mathcal{R}^+$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{R}$  plus grands que  $0_E$  au sens de  $\leq$ . On note  $\mathcal{B}$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{R}^+$  ne s'écrivant pas comme somme de deux éléments de  $\mathcal{R}^+$ .

i) Soit  $x \in \mathcal{R}^+$ . Montrer que  $x$  s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{B}$  à coefficients entiers positifs.

ii) Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .

1192. ★ Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a) i) Donner la définition d'un endomorphisme autoadjoint.

Soient  $B$  une base orthonormale de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $f$  est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans la base  $B$  est symétrique.

ii) Soient  $B$  une base orthonormale de  $E$  et  $f \in \mathcal{S}^+(E)$ .

On note  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  la matrice de  $f$  dans la base  $B$ . Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Montrer que, si  $m_{i,i} = 0$ , alors les ligne  $i$  et colonne  $i$  de la matrice  $M$  sont nulles.

Ind. Considérer l'application  $t \mapsto \langle f(e_j + te_i), e_j + te_i \rangle$ .

b) Soient  $f \in \mathcal{S}^+(E)$  et  $g \in \mathcal{S}(E)$  tels que  $\forall t \in \mathbb{R}, \det(f - tg) = 0$ .

i) Montrer que  $\text{Ker}(g) \neq \{0\}$ .

ii) Montrer que  $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) \neq \{0\}$ .

1196. ★ a) Montrer que  $E = \ell^1(\mathbb{N})$ , espace des suites réelles sommables, est un espace vectoriel normé pour  $u \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ .

b) On munit  $E$  de la relation d'ordre partielle  $u \preceq v \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ . Soit  $(u_k)$  une suite d'éléments de  $E$  croissante et majorée par  $v \in E$ . Montrer que  $(u_k)$  converge dans  $E$ .

c) Soient  $u, v$  deux éléments de  $E$  tels que  $u \preceq v$ . Montrer que l'ensemble des éléments  $w$  de  $E$  tels que  $u \preceq w \preceq v$  est compact.

d) Donner un exemple de partie compacte  $K$  de  $E$  telle qu'il n'existe pas de suite  $u \in E$  vérifiant  $\forall x \in K, |x| \preceq u$ .

1199. ★ a) i) Montrer que l'image d'une partie connexe par arcs par une fonction continue est connexe par arcs.

ii) Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue et injective sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est strictement monotone.

Soit  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et toute matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ , la matrice  $f(A) = (f(a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$  est inversible.

**b)** Montrer que  $f$  est strictement monotone et ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^*$ .

**c)** On suppose  $f$  croissante et surjective. Caractériser  $f$ .

1214. ★★ Soit  $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que la série  $\sum a_n$  converge. Soit  $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{x}{n}\right)$ .

On suppose que  $S$  a une limite réelle  $\ell$  en  $+\infty$ . On souhaite montrer que la suite  $(a_n)$  est nulle.

**a) i)** Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange à un ordre quelconque.

**ii)** Montrer que  $S$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

**b)** On suppose dans cette question que la série  $\sum a_n$  converge absolument et que  $\ell = 0$ .

**i)** Montrer que  $S$  est continue.

**ii)** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $I : T \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T S(x) \cos\left(\frac{x}{m}\right) dx$ .

Montrer que  $\lim_{T \rightarrow +\infty} I(T) = 0$ .

**iii)** Montrer que  $a_m = 0$ .

**c)** Traiter le cas général.

1233. ★★ Soient  $U$  un ouvert non vide d'un espace normé  $E$  de dimension finie et  $[a, b]$  un segment inclus dans  $U$  avec  $a \neq b$ .

**a)** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable.

Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = df(c)(b - a)$ .

**b)** Soit  $f : U \rightarrow F$  où  $F$  est un espace euclidien. On suppose  $f$  différentiable sur  $U$  et  $df$  bornée sur  $U$ . Montrer que  $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in [a, b]} \|df(x)\|_{\text{op}} \|b - a\|$ .

**c)** Montrer que l'inégalité est encore vérifiée si  $F$  est un espace vectoriel normé de dimension finie.

1238. ★★ Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

**a)** Calculer la fonction génératrice associée à une loi de Poisson.

**b)** Montrer que  $S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$ .

**c)** Montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbf{P}(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$ .

**d)** Soit  $x > 0$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < \lambda, \\ 1 & \text{si } x > \lambda. \end{cases}$

**e)** Si  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction continue et nulle en dehors d'un segment, on pose

$$\mathcal{L}(f) : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt.$$

Montrer que, pour tout  $x \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} \mathcal{L}(f)^{(k)}(n) = \int_0^x f.$