REVUE DE LA FILIÈRE
MATHÉMATIQUES
RMS

Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles

Le comité de rédaction remercie Walter Appel, Laurent Bonavero, Olivier Bouverot, Philippe Châteaux, Denis Choimet, Yves Dutrieux, Serge Francinou, Jérôme Gartner, Yoann Gentric, Cyril Germain, Hervé Gianella, Gil Guibert, Max Hochart, Adrien Joseph, Denis Jourdan, Thomas Lafforgue, Christelle Larchères, François Lussier, Roger Mansuy, Shalay Mohan, Bruno Morel, François Moulin, Jean Nougayrède, Mickaël Prost, Marc Rezzouk, Franz Ridde, Emmanuel Roblet, Christophe Schneider, Cécile Stérin, Brice Touzillier, Séverine Verneyre pour leurs contributions à cette liste d'exercices.

Les lecteurs désirant faire parvenir des solutions d'exercices à la rédaction sont priés de le faire avant le 3 février 2027, de préférence par courrier électronique en pdf et si possible en Tex à l'adresse : *exercices@rms-math.com*. Nous demandons aux lecteurs ayant utilisé une IA de bien vouloir le préciser.

Les exercices avec une étoile sont réservés aux étudiants, ceux avec deux étoiles sont proposés à tous les lecteurs.

Le symbole $^\diamond$ permet d'identifier les exercices accessibles aux étudiants de première année.

Écoles Normales Supérieures – MP – MPI

6. [ULSR] ◇ ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on se propose d'établir la propriété $\mathcal{P}_n$: pour toute famille de $2n-1$ nombres entiers relatifs, il existe une sous-famille de n entiers dont la somme est divisible par n.
a) Traiter les cas $n = 1$ et $n = 2$.
b) On suppose que $n \geqslant 2$. Montrer qu'il existe une famille de $2n-2$ nombres entiers relatifs dont aucune sous-famille de n entiers n'a une somme divisible par n.
c) Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_n$ sont vraies, il en est de même de $\mathcal{P}_{mn}$.
d) Soit p un nombre premier. Déterminer la classe modulo p de $\binom{2p-1}{p}$ et, si $s \in [\![1, p]\!]$, de $\binom{2p-1-s}{p-s}$.
e) Soient p un nombre premier, I un ensemble de cardinal $2p-1$, $(a_i)_{i\in I}$ dans $\mathbb{Z}^I$. On suppose que, pour toute partie J de I de cardinal p, $\displaystyle\sum_{i\in J} a_i$ n'est pas divisible par p. Obtenir une contradiction en considérant

$$\sum_{\substack{J\in\mathcal{P}(I)\\ |J|=p}} \left(\sum_{i\in J} a_i\right)^{p-1}.$$

Conclure.

7. ◇ ★★ Soit G un groupe. Une fonction $f : G \to \mathbb{R}$ est un *quasi-morphisme* quand il existe $C \geqslant 0$ tel que, pour tous $a, b \in G$, $|f(ab) - f(a) - f(b)| \leqslant C$. Un quasi-morphisme f est dit *homogène* quand, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $a \in G$, $f(a^n) = nf(a)$.
a) Soit f un quasi-morphisme. Montrer que, pour tout $a \in G$, la suite $\left(\dfrac{f(a^{2^k})}{2^k}\right)$ converge.
b) On suppose G abélien. Montrer que tout quasi-morphisme f se décompose de façon unique sous la forme $f = f' + h$, où f' est un quasi-morphisme homogène et h une fonction bornée.
c) Montrer que, si f est un quasi-morphisme homogène, alors

$$\forall a, b \in G, \quad f(aba^{-1}) = f(b).$$

8. [U] ★ Soit φ un morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres de $\mathbb{Q}[X]$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que le noyau de φ contient un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$. On note $\mathbb{K}$ le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par l'image de φ, G le sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$ engendré par la famille $(\varphi(X^n))_{n\in\mathbb{N}}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que G soit dense dans $\mathbb{K}$.

11. [ULSR] ★★ Soit R un anneau commutatif. On note

$$\mathrm{SL}_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(R) \ ; \ ad - bc = 1_R \right\}.$$

Soit p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$, on admet que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})$ est un groupe pour le produit matriciel.
a) Soit $\Pi\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ la réduction modulo p. Montrer qu'il s'agit d'un morphisme de groupes surjectif.
b) Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ nilpotente. On suppose à présent $p > 3$. Montrer que si $A \equiv I_2 + X \pmod{p}$ alors $A^p \equiv I_2 + pX \pmod{p^2}$.
c) Soit H un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ tel que $\Pi(H) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
Montrer que $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.
d) Montrer le même résultat avec $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})$ à la place de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.

13. [U] ★ Un idéal I d'un anneau commutatif est dit premier si $A \setminus I$ est stable par multiplication ; il est dit maximal si les seuls idéaux qui le contiennent sont I et A.
a) Montrer que tout idéal premier non nul de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ est maximal.
b) Montrer que tout idéal maximal de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ est premier.

14. [ULSR] ★ Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre commutative (unitaire) de dimension finie. On note $\mathcal{N}il(A) = \{x \in A,\ x \text{ nilpotent}\}$.
a) Rappeler la définition d'un idéal et montrer que $\mathcal{N}il(A)$ est un idéal.
b) Montrer que si $x \in \mathcal{N}il(A)$ alors $1 - x$ est inversible.
c) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall x_1, \dots, x_M \in \mathcal{N}il(A),\ x_1 \dots x_M = 0$.
d) Montrer que $M = \dim A$ convient.
e) Soit $\mathcal{L}_x : y \in A \mapsto xy \in A$. Montrer que $x \in \mathcal{N}il(A)$ si et seulement si $\chi_{\mathcal{L}_x} = X^{\dim A}$.
f) Montrer que $\forall x \in A,\ \chi_{\mathcal{L}_x}(x) = 0$.

16. [U] ◇ ★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\geqslant 2$. Le polynôme P est dit *sympathique* s'il est le produit de deux polynômes non constants à coefficients positifs. On suppose qu'il existe $n \geqslant 2$ tel que $P(X^n)$ soit sympathique. Démontrer que P est également sympathique.

17. [U] ★ Soient K un corps de caractéristique nulle et $a \in K$. Soit $(P, Q) \in K[X]^2$ non tous deux nuls en a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in K^2$ tels que $\lambda P + \mu Q$ soit un polynôme non nul admettant a comme racine de multiplicité n si et seulement si a est racine de $P'Q - PQ'$ de multiplicité $n - 1$.

18. [ULSR] ◇ ★★ ***a)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $U_n, V_n \in \mathbb{Z}[X]$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(1 + iz)^n = U_n(z) + i\,V_n(z)$. Donner le degré de V_n, puis ses racines.
b) Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 3 \pmod{4}$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, p divise $V_{p+1}(k)$.
c) Soient p un nombre premier impair, $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $d = m \wedge n$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On suppose que $p \mid V_m(k)$ et $p \mid V_n(k)$. Montrer que $p \mid V_d(k)$.

26. [ULSR] ◇ ★ Soient p un nombre premier et n un entier strictement positif.
a) Dénombrer les bases de l'espace vectoriel $(\mathbb{F}_p)^n$.
b) Soit E un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un unique couple (V, W) de sous-espaces de E tels que :
$-\ E = V \oplus W$,

– les sous-espaces V et W sont stables par u,
– l'endomorphisme induit par u sur V est inversible,
– l'endomorphisme induit par u sur W est nilpotent.
c) En déduire le nombre de matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$.
d) Peut-on mener le même calcul dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ pour un entier d quelconque ?

33. [U] ★★ Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^2 + B^2 = 2AB$. Montrer que $\chi_A = \chi_B$.

37. [ULSR] ★★ Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une matrice $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ est dite super-puissante si $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists A_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), M = A_n^n$.
a) Déterminer les matrices super-puissantes dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
b) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est super-puissante si et seulement s'il existe $R \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M = R^2$.
c) Sur $\mathbb{Q}$, montrer que les matrices super-puissantes sont de déterminant 1.

45. [ULSR] ★★ ***a)*** Pour $a \in \mathbb{C}$, montrer que $|a| < 1$ si et seulement si, pour tout v complexe non nul, il existe un unique $\rho > 0$ tel que $|a + \rho v| = 1$.
b) On identifie $\mathbb{C}$ au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, que l'on munit de sa structure euclidienne canonique. Soient T un automorphisme de $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$. On définit

$$T_a : z \in \mathbb{U} \mapsto \frac{a + T(z)}{|a + T(z)|} \in \mathbb{U}.$$

Montrer que T_a est bien défini, continu et bijectif si et seulement si $|T^{-1}(a)| < 1$.
c) On suppose la condition précédente vérifiée, montrer que T_a est une involution si et seulement si T est autoadjoint, a est un vecteur propre de T avec une valeur propre associée λ strictement négative et l'autre valeur propre μ vérifie $\lambda^2 = |a|^2 + \mu^2$.

46. [U] ★★ Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres simples et $V \in \mathbb{R}^n$ unitaire. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $G(t) = S + tVV^T$.
a) À quelle condition $G(t)$ et S n'ont-elles pas de valeurs propres communes ?
b) Étudier les valeurs propres de $G(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

49. [SR] ★★ Soit $n \geqslant 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée. On rappelle que toute matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ a une unique racine carrée dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, que l'on note $\sqrt{A}$. Si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $A \leqslant B$ si $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et $A < B$ si $B - A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\|A\|^2 = \max(\mathrm{Sp}(A^T A)).$$

En déduire que, pour $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,

$$\|A\| = \max_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\langle AX, X \rangle}{\|X\|^2} = \max(\mathrm{Sp}(A)).$$

b) Soient $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $CD \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\|CD\| \leqslant \|DC\|$.
c) Montrer que $\sqrt{\cdot}$ est croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
d) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que l'on peut trouver $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $e^B = A$.
e) Montrer que ce B est unique si on impose $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On le note alors $\ln(A)$.
f) Montrer que $\ln$ est croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. *Ind.* Utiliser la question ***c)***.
g) Est-ce que $A \mapsto A^2$ est croissante sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

54. [U] ★★ Soient $S = (s_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $T = S^{-1} = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et

$$\Phi(S) = (s_{i,j}\ t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Montrer que $\Phi(S)$ est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et que la plus petite valeur propre de $\Phi(S)$ est 1.

56. [SR] ★★ On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme $\|\ \|$, on note B la boule unité fermée et l'on pose

$$\Delta = \sup_{(x,y,z)\in B^3} \min(\|x-y\|, \|y-z\|, \|z-x\|).$$

a) Montrer que Δ est atteint.
b) Montrer que $\Delta \leqslant 2$.
c) Calculer Δ pour la norme euclidienne canonique.
d) Calculer Δ pour la norme infinie.
e) Montrer que $\Delta \geqslant 1$.

57. [L] ★ Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leqslant 1\}$.
a) Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer que f admet un point fixe.
b) On admet que, pour toute fonction continue g de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{U}$, il existe une fonction continue θ de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g = \exp(i\theta)$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue r de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{U}$ dont la restriction à $\mathbb{U}$ soit l'identité de $\mathbb{U}$.
c) Déduire de la question précédente que toute fonction continue de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ admet un point fixe.
d) Soit C un convexe fermé de $\mathbb{R}^2$. Est-il vrai que toute fonction continue de C dans C admet un point fixe ?

58. [L] ★★ Soit A l'ensemble des $f : [0,1]^2 \to [0,1]$ telles que :
– $\forall (u,v) \in [0,1]^2$, $f(0,v) = f(u,0) = 0$ et $f(u,1) = u$,
– $\forall\, 0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant v_1 \leqslant v_2 \leqslant 1$, $f(u_1,v_2) - f(u_1,v_1) \leqslant f(u_2,v_2) - f(u_2,v_1)$.
Déterminer $h_0, h_1 \in A$ tels que $\forall f \in A, \forall (u,v) \in [0,1]^2,\ h_0(u,v) \leqslant f(u,v) \leqslant h_1(u,v)$.

61. [ULSR] ★★ Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Une forme linéaire $\varphi \in E^*$ est dite positive si, pour tout $f \in E$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, $\varphi(f) \in \mathbb{R}^+$.
a) Montrer que toute forme linéaire positive sur E est continue pour $\|\ \|_\infty$.
b) Soit φ une forme linéaire sur E continue pour $\|\ \|_\infty$. Montrer que φ est différence de deux formes linéaires positives sur E.

64. [U] ★★ Soit d un entier $\geqslant 2$.

a) Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{R}$ et que $\{\mathrm{tr}(M^n)\,;n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $\mathbb{R}$?
b) Même question lorsque M a exactement deux valeurs propres non réelles.
Ind. Considérer une énumération des rationnels.

68. [Magistère Rennes] $^{\diamond}$ $\star\star$ Montrer qu'il existe un unique couple $(\alpha, \theta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tel que

$$\sin\left(\frac{\theta}{n^\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\theta}{(n+1)^\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right).$$

69. [U] $^{\diamond}$ $\star$ Soient $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$x_n = \sqrt[p]{c_1 + \sqrt[p]{c_2 + \sqrt[p]{\cdots + \sqrt[p]{c_n}}}}.$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si la suite $\left(\frac{\ln(c_n)}{p^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

70. [SR] $^{\diamond}$ $\star$ Soient N un entier supérieur ou égal à 2 et α un réel strictement positif. On pose

$$S_N = \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{m^\alpha} \sin^2\left(\frac{m\pi}{N}\right).$$

a) Pour quelles valeurs de α la série définissant S_N est-elle convergente ?
b) Déterminer la limite de S_N lorsque $N \to +\infty$.
c) Déterminer un équivalent de S_N lorsque $N \to +\infty$ dans le cas où $1 < \alpha \leqslant 2$.

76. [ULSR] $\star\star$ ***a)*** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction f non nulle, de classe $\mathcal{C}^k$, à support compact et telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.
b) Montrer qu'il existe une fonction f non nulle, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact.
c) Montrer qu'il existe une fonction f non nulle, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact et telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

84. [L] $\star$ Trouver une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction f continue à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on ait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{\sqrt{|y-x|}}\mathrm{d}y \leqslant C\,\sqrt{\|f\|_\infty\,\|f\|_1}.$$

88. [U] $\star$ Soient $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
On pose : $E_c(f) = \left\{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1 \text{ et } \sum a_n z^n \text{ converge}\right\}$.

a) Montrer que $E_c(f)$ peut être l'ensemble vide, le cercle unité $\mathbb{U}$ tout entier, ou $\mathbb{U} \setminus S$ avec S une partie finie. Montrer en revanche que $E_c(f)$ ne peut pas être n'importe quel sous-ensemble de $\mathbb{U}$.
b) On suppose que $a_n \to 0$. Montrer qu'il est possible que $E_c(f) = \emptyset$ ou que $E_c(f) = \{1\}$.

89. [ULSR] ★ Si n est un entier $\geqslant 2$, un élément σ de $\mathcal{S}_n$ est dit en zigzags si, pour tout i de $\{2, \dots, n-1\}$, $\sigma(i)$ n'est pas compris entre $\sigma(i-1)$ et $\sigma(i+1)$. Une permutation en zigzags est dite ascendante si $\sigma(2) > \sigma(1)$, descendante dans le cas contraire.
a) Montrer que, si $n \geqslant 2$, il y a autant de permutations en zigzags ascendantes que descendantes.
b) Pour $n \geqslant 2$, soit A_n le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$ en zigzags et ascendantes. On convient que $A_0 = A_1 = 1$. Pour $n \geqslant 1$, vérifier que

$$2A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k \, A_{n-k}.$$

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} \, x^n$.
c) Montrer que le rayon de convergence de f est $\geqslant 1$.
d) En utilisant une équation différentielle, déterminer une expression de $f(x)$.

93. [U] ★★ Déterminer un équivalent, quand $\delta \to 0$, de

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_{\delta}^{+\infty} \frac{e^{-n^2 t}}{t} \mathrm{d}t\right).$$

95. [L] ★★ Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On considère une solution $y \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ du problème aux limites : $y'' - y = f$, $y(0) = y(1) = 0$.
a) Montrer que la solution y est unique.
b) Montrer que

$$\int_0^1 y^2 \leqslant \frac{1}{(1+\pi^2)^2} \int_0^1 f^2.$$

103. [L] ★★ On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne orientée canonique et on note S la sphère de centre 0 et de rayon 1, B la boule fermée de centre 0 et de rayon 1, r la rotation d'angle $\pi/2$. Soient u une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, x une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^2$ telles que :
(i) $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ x'(t) = u(x(t))$,
(ii) $\forall y \in \mathbb{R}^2 \setminus B, \langle u(y), y\rangle < 0$,
(iii) $\forall y \in S,\ \langle u(y), r(y)\rangle = \|y\|^2$,
(iv) $\exists e \in S,\ \langle u(e), e\rangle < 0$.
Montrer qu'il existe $T \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall t \in [T, +\infty[,\ \|x(t)\| < 1$.

111. [SR] $^{\diamond}$ $\star\star$ ***a)*** On considère trois dés équilibrés dont les faces sont numérotées respectivement par les ensembles $\{18,9,8,7,6,5\}$, $\{17,16,15,4,3,2\}$ et $\{14,13,12,11,10,1\}$, et l'on note A, B et C les résultats de chaque lancer. Calculer $\mathbf{P}(A > B)$, $\mathbf{P}(B > C)$ et $\mathbf{P}(C > A)$. Commenter le résultat.
b) On numérote les faces de trois dés à n faces avec les entiers de 1 à $3n$ et l'on note A, B et C les résultats de chaque lancer. Montrer que l'une des trois probabilités $\mathbf{P}(A > B)$, $\mathbf{P}(B > C)$ ou $\mathbf{P}(C > A)$ est inférieure ou égale à $2/3$.

113. [U] $\star\star$ Que dire de deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes X et Y telles que $X + Y$ et Y soient indépendantes ?

114. [U] $^{\diamond}$ $\star$ Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, M_n une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Montrer qu'il existe une constante absolue $c > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(M_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) \geqslant c$.

115. [U] $\star\star$ Soit $R > 0$. On choisit aléatoirement un polynôme $P_n \in \mathbb{C}_n[X]$ unitaire de degré n, à coefficients indépendants suivant la loi uniforme sur $B(0,R) \cap \mathbb{Z}[i]$. Où se situent les racines de P_n quand n tend vers l'infini ?

116. [L] $\star\star$ On définit pour une suite de réels $u = (u_i)_{i\geqslant 0}$ la suite des matrices $H(u)$ telles que $H_n(u) = (u_{i+j-2})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
a) On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathbf{E}(X^n)$, avec X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment de tout ordre. Montrer que toutes les matrices $H_n(u)$ sont symétriques positives. Quel est leur rang ?
b) On suppose que $u_0, \ldots, u_{2M-2}$ vérifient $H_M(u) \in \mathcal{S}_M^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que la suite u peut être prolongée à partir du rang $2M-1$ en une suite infinie telle que, pour tout $n \geqslant M$, on ait $\mathrm{rg}(H_n(u)) = M$.
c) On suppose dans cette question que : $\forall n \in \mathbb{N},\ H_n(u) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que les seules natures possibles pour la suite $(\mathrm{rg}(H_n(u)))_{n\geqslant 0}$ sont : soit pour tout $n \in \mathbb{N},\ \mathrm{rg}(H_n(u)) = n$; soit pour tout $n \leqslant M,\ \mathrm{rg}(H_n(u)) = n$, puis cette suite est stationnaire égale à M.

118. [L] $\star\star$ Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier. On admet que le polynôme $X^3 - 1$ a pour unique racine 1 dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv 2 \pmod 3$. On tire une matrice M dans $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ avec la probabilité uniforme. Calculer $\mathbf{P}(M^3 = I_3)$.

120. [L] $^{\diamond}$ $\star$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k, \ldots$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit σ_m la permutation aléatoire $(a_1\, b_1) \circ \cdots \circ (a_m\, b_m)$, μ_m la loi de σ_m.
a) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, exprimer μ_{m+1} en fonction de μ_m.
b) À quelle condition sur m a-t-on $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ \mu_m(\{\sigma\}) > 0$?

121. [U] $\star\star$ Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{X_i}{i^\alpha} \quad \text{et} \quad F_N : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{P}(S_N \leqslant x).$$

Montrer que la suite (F_N) converge ; on note F sa limite. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ et $x \geqslant 0$ a-t-on $F(x) > 0$?

122. [L] ★★ ***a)*** Soient $a \in]0,1[$ et $b \in \mathbb{R}^{+*}$.
Montrer qu'il existe $c_{a,b} > 0$ tel que, pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\mathbf{E}(Z) = 1$ et $\mathbf{E}(Z^2) \leqslant b$, on a $\mathbf{P}(Z \geqslant a) \geqslant c_{a,b}$.
b) Soient $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Rademacher et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

i) Montrer que, pour tout $a > 0$, il existe $\varphi(a) > 0$ tel que, pour tout n assez grand,

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant a\right) \geqslant \varphi(a).$$

ii) Montrer que

$$\mathbf{P}\left(\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1} \text{ bornée}\right) = 0.$$

123. [ULSR] ★ ***a)*** Montrer que la fonction τ qui, à un entier naturel non nul, associe son nombre de diviseurs positifs vérifie $\tau(mn) = \tau(m)\,\tau(n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.
b) Trouver un équivalent de $\mathbf{E}\left(\tau(T_N)\right)$ quand $N \to +\infty$ où $T_N \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$.
c) Montrer que $\mathbf{P}\left(\tau(T_N) > \ln^3(N)\right) = \mathcal{O}(1/\ln^3(N))$ quand $N \to +\infty$.

127. [U] ★★ Soient $\beta \in]2, +\infty[$ et $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires telles que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_1 = m) = \frac{1}{\zeta(\beta)}\frac{1}{m^\beta}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer un équivalent simple de $\mathbf{E}(M_n)$.

128. [U] ★★ Soient $(p_k)_{k\geqslant 0} \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ et $(X_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbf{P}(X_k = 1)$. Soit $(a_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de réels positifs.
a) On suppose que $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k p_k < +\infty$. Montrer que, quel que soit $A \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X_k \leqslant A\right) > 0.$$

b) On suppose que $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k p_k = +\infty$ et que $(a_k)_{k\geqslant 0}$ est bornée.
Montrer que, pour tout $A > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X_k \leqslant A\right) = 0/$$

129. [U] ★★ Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles indépendantes. On suppose que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{E}(|X_k|) < +\infty$ et $\mathbf{E}(X_k) \geqslant 0$. On note $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

a) Montrer que

$$\forall C > 0, \quad \mathbf{P}(\max(S_1, \dots, S_n) \geqslant C) \leqslant \frac{\mathbf{E}(\max(S_n, 0))}{C}.$$

b) On suppose de plus que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{E}(X_k) = 0$ et $\mathbf{E}(X_k^2) < +\infty$.
Montrer alors que

$$\forall C > 0, \quad \mathbf{P}(\max(|S_1|, \dots, |S_n|) \geqslant C) \leqslant \frac{\mathbf{E}(S_n^2)}{C^2}.$$

139. [U] ★★ Soient p dans $[0, 1]$, $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p, $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de variables aléatoires définie par

$$Y_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = \frac{1}{5}({Y_n}^2 + 4X_n + 2).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{P}(\min(Y_1, \dots, Y_n) \leqslant x) \quad \text{et} \quad G_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{P}(\max(Y_1, \dots, Y_n) \leqslant x).$$

Montrer que les suites de fonctions $(F_n)_{n\geqslant 0}$ et $(G_n)_{n\geqslant 0}$ convergent simplement vers des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

Écoles Normales Supérieures – PSI

156. ◇ ★ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs.
a) Déterminer un équivalent simple de

$$\frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{\ln(n)}.$$

b) A-t-on

$$(u_n + u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n} \implies u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \ ?$$

c) A-t-on

$$(u_n + u_{n+2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n} \implies u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad ?$$

d) A-t-on

$$(u_n + u_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2n} \implies u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad ?$$

e) Reprendre les questions précédentes en supposant $(u_n)_{n\geqslant 0}$ décroissante.

Écoles Normales Supérieures – PC

174. ◇ ★ On considère $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$, avec A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer $\det \phi$ et $\operatorname{Tr} \phi$.

186. ★ Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

197. ◇ ★★ Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $f''(0) \neq 0$.
On définit la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ par $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{\Delta_n}$ où

$$\Delta_n = \frac{f(a_n) - f(a_{n-1})}{a_n - a_{n-1}}.$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $a_0, a_1 \in]0, \varepsilon[$, alors $a_n \to 0$.

203. ◇ ★ Déterminer les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}.$$

212. ★ Soient $\varepsilon > 0$, $\alpha \in [0, 1[$ et $\beta > 0$.
Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha (x+\varepsilon)^\beta}$ lorsque ε tend vers 0^+.

École Polytechnique – MP – MPI

228. ◇ ★ Déterminer le cardinal de l'ensemble

$$\left\{ (x_k)_{k\geqslant 0} \in [\![0, 9]\!]^{\mathbb{N}} \ ; \ \forall n \geqslant 0, \ a_n^2 \equiv a_n \pmod{10^n} \text{ où } a_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k 10^k \right\}.$$

229. ◇ ★ Soient A un anneau fini et $a, b \in A$ tels que $ab^2 = b$. Montrer que $bab = b$.

231. ◇ ★★ Soit G un groupe fini. On suppose que, pour tout automorphisme f de G, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall x \in G, \ f(x) = x^m$.
a) Soient $a, b \in G$. On suppose que $o(a)$ divise $o(b)$. Montrer que $ab = ba$.
b) On décompose $\operatorname{Card}(G)$ en facteurs premiers :

$$\operatorname{Card}(G) = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

Pour $i \in [\![1,k]\!]$, on pose

$$G_i = \left\{ x \in G,\ x^{p_i^{\alpha_i}} = e \right\}.$$

Montrer que G_i est un sous-groupe commutatif de G.
c) Soient $i, j \in [\![1,k]\!]$ tels que $i \neq j$. Montrer que $\forall (x,y) \in G_i \times G_j,\ xy = yx$.
d) Montrer que G est commutatif.

233. $^{\diamond}$ ** Soit p un nombre premier. On considère un sous-groupe de G de S_p vérifiant $\forall (x,y) \in [\![1,p]\!]^2,\ \exists g \in G,\ g(x) = y$. On admet que tout groupe fini dont l'ordre est divisible par p contient un élément d'ordre p. On note enfin $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p)$ le groupe des permutations de $\mathbb{F}_p$ de la forme $x \mapsto ax + b$ avec $a \in \mathbb{F}_p^{\times}$ et $b \in \mathbb{F}_p$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :
(i) il existe deux éléments distincts x et y de $[\![1,p]\!]$ tels que le seul élément de G fixant x et y soit l'identité,
(ii) l'ordre G est strictement inférieur à p^2,
(iii) G possède un unique sous-groupe d'ordre p,
(iv) il existe une bijection $\theta : [\![1,p]\!] \to \mathbb{F}_p$ et un sous-groupe H de $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p)$ tels qu'on ait l'égalité $\{\theta \circ g \circ \theta^{-1},\ g \in G\} = H$.

248. $^{\diamond}$ ** Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, on note $\phi(A)$ le pgcd de ses coefficients.
a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Trouver une relation entre $\phi(AB)$ et $\phi(A)\,\phi(B)$.
b) Montrer que $\phi(AB)$ divise $\det(A)\,\phi(B)$.
c) Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$. On suppose que $A^2 - \alpha A + I_n = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\phi(A^k - I_n) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

250. $^{\diamond}$ * Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A^2 + B^2 = 2AB$.
a) Montrer que $AB - BA$ n'est pas inversible.
b) On suppose que $\mathrm{rg}(A - B) = 1$. Montrer que $AB = BA$.

254. $^{\diamond}$ * Soient $n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Soit $E = \{A_1, \ldots, A_p\}$ un ensemble de p matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. On suppose que, pour tous $A, B \in E$, $AB \in E$. On veut montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p) \in \{0,1,-1\}^p \setminus \{(0,\ldots,0)\}$ tel que $\mathrm{rg}\,(\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 + \cdots + \varepsilon_p A_p) \leqslant n$.
On suppose par l'absurde que c'est faux.
a) Soit $A \in E$. Montrer que l'application $f : E \to E$ définie par $M \mapsto AM$ est injective.
b) Soit $A \in E$. Montrer que $\mathrm{rg}(A - I_{2n}) \leqslant n$. *Ind.* Considérer $S = \sum_{i=1}^{p} A_i$.
c) Conclure.

265. $^{\diamond}$ * On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$.
a) On suppose que $\langle by - x, x - ay \rangle \geqslant 0$. Montrer que

$$\|x\|\,\|y\| \leqslant \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\,|\langle x, y \rangle|.$$

b) On suppose qu'il existe $m_1, m_2, M_1, M_2 > 0$ tels que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in [m_1, M_1]$ et $y_i \in [m_2, M_2]$. Montrer que

$$\langle x, y\rangle \geqslant \frac{2}{\sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}} + \sqrt{\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}}} \|x\|\|y\|.$$

c) Montrer que $\langle by - x, ay - x\rangle \leqslant 0$ si et seulement si

$$\left\| x - \frac{a+b}{2}\, y \right\| \leqslant \frac{|b-a|}{2} \|y\|.$$

d) Montrer que, si $\langle by - x, x - ay\rangle \geqslant 0$, alors

$$\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\|y\|^4.$$

272. ★★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $AA^T = A^T A$ si et seulement si $A^2A^T = AA^TA$.

274. ★ Soient X une partie compacte d'un espace vectoriel normé et $f : X \to X$ une fonction continue. Pour tout $x \in X$, on pose

$$\omega(f, x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^k(x)\,;\, k \geqslant n\}}.$$

a) On suppose qu'il existe $x \in X$ tel que $\omega(f, x) = X$. Montrer que f est transitive, c'est-à-dire que, pour tous ouverts non vides U et V de X, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
b) On suppose maintenant qu'il existe $x \in X$ tel que $\omega(f, x)$ est fini et non vide. Montrer que f induit sur $\omega(f, x)$ une permutation cyclique.

276. ★★ Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $d(A) = \dim(\mathbb{C}[A])$.
a) Quelles valeurs peut prendre $d(A)$?
b) Soit $P \in \mathbb{C}$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $d(P(A)) = d(A)$.
c) Étudier les propriétés topologique de l'ensemble $E_k = d^{-1}(k)$.

283. ★★ On pose

$$\alpha = 4 \sum_{k=0}^{499999} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Montrer qu'exactement une des 16 premières décimales de α diffère de la décimale de π correspondante.

284. ◇ ★ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{\ln(6^x + 1)}{\ln 7} = \frac{\ln(7^x - 1)}{\ln 6}.$$

288. ◇ ★★ Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que $ff'' - f'^2 \geqslant 0$. Montrer que si f s'annule en un point alors $f = 0$.

303. ★ Soit $P = a_1 X + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{R}[X]$ avec $a_d \neq 0$. Soit $f : z \mapsto e^{P(z)}$. On suppose que f est développable en série entière : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ avec $\forall n \geqslant 0,\ c_n > 0$.

a) Montrer que $a_d > 0$ et $a_v > 0$ où $v = \min\{i, a_i \neq 0\}$.

b) On suppose $P = a_v X^v + a_m X^m + a_d X^d$, avec $v < m < d$. Montrer que $a_m \geqslant 0$.

Ind. Poser $\rho = e^{\frac{2i\pi}{d}}$ et considérer $\dfrac{f(\rho z)}{f(z)}$.

c) On revient au cas général et on se donne un entier m tel que $v < m < d$. On suppose que $a_m < 0$ et que $\operatorname{pgcd}\{i\ ;\ a_i \neq 0,\ i \geqslant m+1\}$ ne divise pas m. Montrer qu'il existe $n \geqslant 0$ tel que $c_n \leqslant 0$.

308. ★★ Soient $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $S, T > 0$. On suppose que $(f-g)(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{t/2})$, que $F = f'' - f' + f$ est T-périodique et que $G = g'' - g' + g$ est S-périodique. On suppose en outre que $\lim_{t\to+\infty} (F(t) - G(t)) = 0$. Montrer que $f = g$.

310. ★★ Soient λ dans $]-1, 1[$ et $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = e^t f(\lambda t)$.

a) Montrer que $\mathcal{F}$ est de dimension 1.

b) Majorer asymptotiquement aussi bien que possible en $+\infty$ les éléments de $\mathcal{F}$.

312. ★★ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'équation différentielle $M'(t) = AM(t)B$ portant sur la fonction matricielle M avec $t \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions soient toutes bornées.

319. ◇ ★ On fixe $N \in \mathbb{N}^*$ et on considère une variable aléatoire U_1 qui suit la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$, puis pour $n \geqslant 1$, U_{n+1} suit la loi uniforme sur $[\![1, U_n]\!]$. On note $E_N = \{U_j,\ j \in \mathbb{N}^*\}$.

a) Montrer que $\mathbf{P}(1 \in E_N) = 1$.

b) Calculer $\mathbf{P}(k \in E_N)$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$.

c) Montrer que les événements $(k \in E_N)$ sont indépendants.

École Polytechnique - ESPCI – PC

381. ★★ Soit $n \geqslant 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Si W est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, on note p_W la projection orthogonale sur W. Soit $m \in [\![1, n]\!]$. Montrer l'équivalence entre :

(i) il existe un sous-espace W de dimension m tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\|p_W(e_i)\| = \|p_W(e_1)\|$,

(ii) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\|e_i\|^2 \sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^{-2} \geqslant m$.

402. ◇ ★ Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'entiers naturels non nuls et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers avec $t_0 \geqslant 2$. On pose

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{\prod_{k=0}^{n} t_k}.$$

a) Montrer que S est bien défini et est irrationnel.
b) Que dire si on suppose à présent que les c_n sont des entiers relatifs non nuls ?

406. ◇ ★★ Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose $f \geqslant 0$ et f'' bornée. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leqslant \sqrt{2\|f''\|_\infty f(x)}.$$

432. ★★ ***a)*** Soient H et $K \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $HK = KH$. Soit $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe deux variables aléatoires réelles X et Y telles que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{E}(\exp(i(sX+tY))) = \mathrm{Tr}(R\exp(i(sH+tK)))$.
b) On pose $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $R = \dfrac{1}{2} I_2$. Montrer que la propriété de la question ***a)*** est fausse.

Mines - Ponts – MP - MPI

436. ◇ ★ Pierre de Fermat avait conjecturé que 26 est le seul entier naturel qui peut à la fois s'écrire comme un carré augmenté de 1, car $26 = 5^2+1$, et comme un cube diminué de 1, car $26 = 3^3-1$. Le but de cet exercice est de le démontrer en étudiant l'équation (1) d'inconnues x, y dans $\mathbb{Z}$: $y^3 = x^2+2$.
a) Soit l'ensemble $A = \{a+ib\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
i) Démontrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{C},+,\times)$.
ii) Démontrer que, pour tout élément z de A, l'écriture $z = a+ib\sqrt{2}$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ est unique.
iii) Soient $z_1 \in A$ et $z_2 \in A\setminus\{0\}$. Démontrer qu'il existe $(q,r) \in A^2$ tel que $z_1 = z_2 q + r$ et $|r| < |z_2|$. On pourra commencer par considérer z_1/z_2.
iv) En déduire que A est un anneau principal.
b) Montrer que tout élément inversible de A est de module 1. En déduire l'ensemble $A^\times$ des inversibles de A.
c) Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de (1).
i) Démontrer que $x+i\sqrt{2}$ et $x-i\sqrt{2}$ sont premiers entre eux dans A, c'est-à-dire que leurs seuls diviseurs communs dans A sont les éléments inversibles de A.
ii) En déduire que $x+i\sqrt{2}$ possède une racine cubique dans A.
d) Déterminer l'ensemble des couples $(x,z) \in \mathbb{Z}\times A$ tels que $z^3 = x+i\sqrt{2}$.
e) En déduire l'ensemble des solutions de (1) dans $\mathbb{Z}^2$.

443. ◇ ★ Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ avec $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $|z| \geqslant 1$.

477. ◇ ★ ***a)*** Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que A, B et $A+B$ soient nilpotentes. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = 0$.
b) Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(A_1, \ldots, A_p)$ une base de F. On définit l'orthogonal de F pour la trace par $F^\nabla = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ ; \ \forall A \in F, \ \mathrm{Tr}(AB) = 0\}$. Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi \ : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & B & \longmapsto & \big(\mathrm{Tr}(A_1 B), \ldots, \mathrm{Tr}(A_p B)\big) \end{array}.$$

Montrer que φ est surjective.
c) Montrer que F^∇ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $\dim F^\nabla = n^2 - \dim F$.
d) Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne contenant que des matrices nilpotentes. Donner un exemple de tel sous-espace G tel que $\dim G = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Montrer que, dans le cas général, $\dim G \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

516. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^2 + B^2 = 2AB$.
a) On pose $X = A - B$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $X^k B - B X^k = k X^{k+1}$.
b) En déduire que X est nilpotente.
c) Les matrices A et B sont-elles cotrigonalisables ?

535. ◇ ★ Soient E un espace euclidien, $\mathcal{V}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E, $x \in E$. Pour $V \in \mathcal{V}$, soit π_V le projecteur orthogonal de E sur V. Déterminer $\{\pi_V(x) \ ; \ V \in \mathcal{V}\}$.

545. ★★ Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{Q})$ telles que $\forall t \in \mathbb{R}, \ \mathrm{rg}(A + tB) < n$.
Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Q}) \setminus \{0\}$ tel que $X^T A X = X^T B X = 0$.

549. ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_n = \big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ A^T A = \lambda I_n\big\}$, et on note d_n la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans C_n. Déterminer d_1, d_2 et d_3.

566. ★ Soit C une partie d'un espace normé telle que $\forall (u,v) \in C^2, \ ]u,v[\cap C \neq \emptyset$. Montrer que, si C est fermée, C est convexe. Est-ce vrai si on ne suppose pas C fermée ?

630. ★ Soit $(f_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$.
a) On suppose que la suite $(f_n(0))$ est convergente et que la suite $(f_n' - f_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
b) On suppose que les suites $(f_n(0))$ et $(f_n(1))$ sont convergentes et que la suite $(f_n'' - f_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

637. ★ Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}.$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
b) L'application f est-elle dérivable en 0 ?

649. ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et bornée telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x+1)$.
a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(n)}{n!} x^n.$$

b) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(k) = -\sum_{n=k+2}^{+\infty} \frac{f(n)}{(n-k)!}.$$

c) Conclure que $f = 0$.

699. ★ Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
a) On suppose que $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$. Montrer que f atteint un minimum.
b) On suppose que $\dfrac{f(x)}{\|x\|} \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$. Montrer que ∇f est surjectif.

742. ★★ Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables de Poisson indépendantes. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $\lambda_i > 0$ le paramètre de X_i.
a) Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
On suppose désormais que la série $\sum \lambda_i$ converge.
b) Montrer que

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{i=n}^{+\infty} (X_i \neq 0)\right) = 0.$$

c) En déduire que la série $\sum X_i$ converge presque sûrement.
d) Soit Y une variable aléatoire indépendante des X_i ($i \in \mathbb{N}$), de loi de Poisson de paramètre $\lambda = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,1], \quad |G_{X_0+\cdots+X_n}(t) - G_Y(t)| \leqslant \sum_{i=n+1}^{+\infty} \lambda_i.$$

e) Montrer que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} X_i \sim \mathcal{P}(\lambda).$$

Mines - Ponts – PC

923. ◇ ★ Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $ABAB = 0$. A-t-on nécessairement $BABA = 0$?

Centrale – MP - MPI

1138. ◇ ★★ ***a)*** Énoncer et démontrer le petit théorème de Fermat.
b) On note Ω l'ensemble des nombres premiers p pour lesquels il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $A \neq I_2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} A^k = pI_2$ $(*)$.
i) Montrer que $\{2,3\} \subset \Omega$.
ii) Soient $p \in \Omega \setminus \{2,3\}$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ vérifiant $(*)$. Montrer que $\det(A) \equiv 0\ [p]$ ou $\det(A) \equiv 1\ [p]$.
iii) Déterminer Ω.

1160. ***a)*** Rappeler la définition d'une partie dense d'un espace vectoriel normé. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme $\|\ \|$. Soit $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ vérifiant :
(i) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ N(A) \geqslant 0$,
(ii) $\forall (\lambda, A) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ N(\lambda A) \leqslant |\lambda| \cdot N(A)$,
(iii) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ N(A+B) \leqslant N(A) + N(B)$.
Montrer que N est lipschitzienne.
c) Déterminer les applications $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ vérifiant (i), (ii), (iii) et, pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(P^{-1}AP) = N(A)$.

1174. ★ Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k : x \mapsto \dfrac{\sin((k!)^2 x)}{k!}$. Soit $W = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$.
a) Montrer que W est définie sur $\mathbb{R}$ et continue.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k.$$

b) Montrer que, pour $n > 0$ et pour $t \in \mathbb{R}$, $|R_n(t)| \leqslant \dfrac{2}{(n+1)!}$.
c) i) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $I_n = \left]x + \dfrac{\pi}{(n!)^2}, x + \dfrac{3\pi}{(n!)^2}\right[$. Soit $y \in I_n$. Montrer que

$$|W_{n-1}(x) - W_{n-1}(y)| \leqslant \frac{4\pi}{n \times n!}.$$

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $x_n \in I_n$ tel que $|f_n(x) - f_n(x_n)| = \dfrac{1}{n!}$.
d) En déduire que W n'est dérivable en aucun point.

1179. ★★ ***a)*** Énoncer le théorème du produit de Cauchy pour les séries entières.
b) Soient A, B des parties de $\mathbb{N}$ telles que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \mathbb{N}$.
On pose, pour x réel,

$$A(x) = \sum_{a \in A} x^a \quad \text{et} \quad B(x) = \sum_{b \in B} x^b.$$

Montrer que A et B sont bien définis sur $]-1,1[$ et calculer $A(x)+B(x)$ pour $x \in]-1,1[$.
c) On pose $r_A(n) = \operatorname{card}\left\{(p,q) \in A^2 \ ; \ p+q=n \text{ et } p \neq q\right\}$.
Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_A(n)\, x^n = A(x)^2 - A(x^2).$$

d) On suppose désormais que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_A(n) = r_B(n)$.
Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$A(x) - B(x) = (1-x)(A(x^2) - B(x^2)).$$

e) On pose $D = A - B$. On suppose que $0 \in A$.
Montrer que, pour tout $N \geqslant 1$ et tout $x \in]-1,1[$,

$$D(x) = D\left(x^{2^N}\right) \prod_{k=0}^{N-1} (1 - x^{2^k}).$$

f) Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\prod_{k=0}^{N-1} \left(1 - x^{2^k}\right) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} D(x).$$

En déduire que A est l'ensemble des nombres dont l'écriture en base 2 possède un nombre pair de 1.

1183. ★ Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)}\, \mathrm{d}t.$$

a) Montrer que I_n est bien définie.
b) En donner un équivalent simple en $+\infty$.