

Épreuves orales

Centrale II avec Python

Table des matières

Épreuves orales : Centrale II - Python – MP	1
Épreuves orales : Centrale II - Python – PSI	16
Épreuves orales : Centrale II - Python – PC	28

Centrale II - Python – MP

Algèbre

1. On dit que A, B , des parties non vides et finies de $\mathbb{N}$, sont en somme directe si, pour tout $z \in A + B$, il existe un unique couple $(a, b) \in A \times B$ tel que $z = a + b$. Si A et B sont en somme directe, on note $A \oplus B$ la somme $A + B$. Pour A partie non vide finie de $\mathbb{N}$ (donnée sous forme d'une liste), on pose $P_A(X) = \sum_{k \in A} X^k$.

a) Écrire une fonction qui prend en entrée deux parties finies non vides de $\mathbb{N}$ et qui renvoie `True` si elles sont en somme directe, `False` sinon. Tester avec des exemples.

b) À l'aide du module `numpy.polynomial`, écrire une fonction qui renvoie $P_A(X)$ pour A en entrée. Tester la fonction.

c) Montrer que A et B sont en somme directe si et seulement si $P_A(X)P_B(X) = P_{A+B}(X)$. On suppose A et B en somme directe. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $A \oplus B$ est n -périodique si $\mathbb{Z} = (A \oplus B) \oplus n\mathbb{Z}$.

d) Montrer que $A \oplus B$ est n -périodique si et seulement si, pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$, il existe un unique $u \in A \oplus B$ tel que $u \equiv j[n]$.

e) On note, pour tout $u \in A \oplus B : u = j_u + nk_u$.

i) Faire la division euclidienne de X^k par $X^n - 1$.

ii) En déduire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_A(X)P_B(X) = (X^n - 1)Q(X) + \sigma_n(X)$,

où $\sigma_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

a) Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est représentée par la liste $[\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)]$.

i) Écrire une fonction PYTHON prenant en argument deux permutations $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ et retournant la composée $\sigma \circ \tau$.

ii) Écrire une fonction PYTHON `cycles_disjoints` qui prend en argument une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et retourne une liste de listes représentant sa décomposition en cycles à supports disjoints.

iii) Écrire une fonction PYTHON prenant en argument une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et retournant le nombre de cycles non triviaux dans sa décomposition en cycles à supports disjoints. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $L(\sigma)$ le cardinal de son support $\text{Supp}(\sigma)$, $C(\sigma)$ le nombre de cycles non triviaux dans sa décomposition en cycles à supports disjoints, $N(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ , $T(\sigma)$ le nombre minimal de transpositions dont la composée vaut σ .

b) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_6$ représentée par $[5, 1, 2, 4, 3, 0]$. Calculer $L(\sigma)$, $C(\sigma)$, $N(\sigma)$, $T(\sigma)$.

c) i) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Exprimer $N(\sigma)$ en fonction de $C(\sigma)$, $L(\sigma)$ et n .

ii) On admet la propriété (*) : $N(\tau \circ \sigma) = N(\sigma) \pm 1$ pour toute transposition τ .

Montrer que $T(\sigma) \geq L(\sigma) - C(\sigma)$.

iii) Montrer d'abord pour un cycle, puis pour une permutation quelconque, que $T(\sigma) = L(\sigma) - C(\sigma)$.

iv) Montrer la propriété (*) admise en ii).

d) On pose $\mathcal{S}_{n+1,i} = \{\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}, \sigma(n) = i\}$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Donner une bijection entre $\mathcal{S}_{n+1,i}$ et $\mathcal{S}_n$.

3. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On dit que σ admet un record en $i \in \{1, \dots, n\}$ si $\forall j < i, \sigma(j) < \sigma(i)$. On note $M(i, n)$ le nombre de permutations de $\mathcal{S}_n$ qui ont i records.

a) On admet (pour l'instant) la relation de récurrence

$$M(i, n) = M(i-1, n) + (n-1)M(i, n-1).$$

i) Programmer une fonction qui renvoie la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, de coefficients :

$$a_{i,j} = (-1)^{j-i} M(i, j).$$

ii) Montrer que A est inversible. Faire une conjecture, à partir de tests sur Python, de la

$$\text{valeur de : } B(p, n) = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} k! [A^{-1}]_{k,n}.$$

b) i) Calculer $M(1, n)$ et $M(n, n)$.

ii) Démontrer la formule de récurrence admise au début.

c) On pose, pour $k \in \mathbb{N}$: $P_k = \sum_{i=0}^n a_{i,k} X^i$.

i) Établir une relation entre P_k et P_{k-1} , pour $k \geq 1$, et en déduire une factorisation de P_k .

ii) Montrer que l'on peut exprimer les polynômes X^k en fonction des P_k et des coefficients de A^{-1} .

4. On définit l'ensemble $\mathcal{E}$ des entiers de $\mathbb{N}^*$ tels qu'il existe $p_m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$1 + 2 + \dots + (m-2) + (m-1) = (m+1) + (m+2) + \dots + (m+p_m).$$

a) On admet dans cette question que, pour tout $m \in \mathcal{E}$, $p_m \leq \lfloor m/2 \rfloor$

i) Écrire une fonction qui reçoit en argument un entier N et renvoie la liste des entiers de l'ensemble $\llbracket 1, N \rrbracket \cap \mathcal{E}$.

ii) L'exécuter pour $N = 10000$.

iii) Écrire une fonction qui reçoit en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la somme suivante : $m_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 8^k 3^{n-2k-1}$ Attention, cette fonction ne doit pas utiliser de fonctions préexistantes calculant des coefficients binomiaux ou des factorielles.

iv) Quelle conjecture peut-on effectuer ?

b) i) Donner un polynôme Q , dont les coefficients dépendent de $m \in \mathcal{E}$, tel que $Q(p_m) = 0$. En déduire l'expression de p_m si m est dans $\mathcal{E}$.

ii) En déduire que $m \in \mathbb{N}^*$ est dans $\mathcal{E}$ si et seulement si $8m^2 + 1$ est un carré parfait. Vérifier le résultat admis au début de la question **a)**

c) i) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{8}] = \{a + b\sqrt{8}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un anneau et que tous ses éléments s'écrivent de manière unique.

ii) Montrer que $U = \{a + b\sqrt{8} \in \mathbb{Z}[\sqrt{8}], a^2 - 8b^2 = 1\}$ est un sous groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{8}]$.

d) i) Montrer qu'il existe un entier t_n tel que $(3 + \sqrt{8})^n = t_n + m_n\sqrt{8}$, et montrer que $(3 + \sqrt{8})^n \in U$.

ii) Montrer que $m \in \mathcal{E}$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n + m\sqrt{8} \in U$.

e) Soit $U^+ = U \cap \mathbb{R}^+$. Montrer que U^+ est un groupe, et montrer que le plus petit élément de $U^+ \cap]1, +\infty[$ est $3 + \sqrt{8}$.

5. a) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier Montrer que $v_p(a, b) = v_p(a) + v_p(b)$, où v_p est la valuation p -adique.

b) i) Écrire une fonction PYTHON `v(n, p)` qui retourne $v_p(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et p premier.

ii) Écrire une fonction PYTHON `somme_base(n, p)` qui retourne la somme des chiffres de l'écriture de l'entier n en base p .

iii) Écrire une fonction PYTHON `nzd(n)` qui retourne le nombre de 0 à droite dans l'écriture décimale de $n!$. La tester avec $n = 500$ et $n = 2025$.

iv) Conjecturer un lien entre $n - \text{somme_base}(n, 5)$ et $\text{nzd}(n)$.

v) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\pi(n)$ le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à n .

À l'aide de la fonction `isprime` de la bibliothèque `sympy`, tracer $\pi(2n)$ et $\frac{2 \ln(2)}{\ln(2n)}$ pour $1 \leq n \leq 10000$. Conjecture ?

c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p premier.

i) Combien d'entiers inférieurs ou égaux à n sont multiples de p ?

ii) Combien d'entiers inférieurs ou égaux à n sont multiples de p et pas de p^2 ?

iii) Montrer que $v_p(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \right)$, puis que $v_p(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

iv) Retrouver (sans PYTHON) `nzd(2025)`.

v) On note n en base p : $n = a_r p^r + \dots + a_0 p^0$, et on pose $s = a_r + \dots + a_0$.

Montrer que $v_p(n) = \frac{n-s}{p-1}$.

6. Soit

$$\mathcal{E} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* ; \forall a_1, \dots, a_{2n-1} \in \mathbb{Z}, \exists I \subset \llbracket 1, 2n-1 \rrbracket, \text{Card}(I) = n \text{ et } \sum_{i \in I} a_i \equiv 0 \pmod{n} \right\}.$$

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes à n variables de degré au plus n .

On admet le résultat suivant : Si $f_1, f_2, f_1 f_2 \in \mathcal{P}_n$ et si p est premier, alors l'ensemble $V = \{x \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^n, f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv 0 \pmod{p}\}$ vérifie $\text{Card}(V) \equiv 0 \pmod{p}$.

a) Écrire en Python trois fonctions `generation`, `trouve_I`, `nombre_calcul`.

b) Soit $p \in \mathcal{P}$. On considère $a_1, \dots, a_{2p-1} \in \mathbb{Z}$.

On note $f_1 : x \mapsto \sum_{i=1}^{2p-1} a_i x_i^{p-1}$, $f_2 : x \mapsto \sum_{i=1}^{2p-1} x_i^{p-1}$. Montrer qu'il existe $\alpha \neq 0$ tel que $f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) \equiv 0 \pmod{p}$.

c) Rappeler le petit théorème de Fermat. Calculer $\text{Card}\{i \in \llbracket 1, 2n-1 \rrbracket, \alpha_i \neq 0\}$. En déduire que $p \in \mathcal{E}$.

d) Soit $m, n \in \mathcal{E}$. On considère $a_1, \dots, a_{2mn-1} \in \mathbb{Z}$.

Construire $I_1, \dots, I_{2m-1}$ des parties disjointes de $\llbracket 1, 2mn-1 \rrbracket$ telles que, pour tout $\ell \in \llbracket 1, 2m-1 \rrbracket$, $\text{Card}(I_\ell) = n$ et $\sum_{i \in I_\ell} a_i \equiv 0 \pmod{p}$. Ind. Effectuer une récurrence sur ℓ .

e) En déduire que $mn \in \mathcal{E}$. Conclure sur $\mathcal{E}$.

7. On définit une suite de polynômes en posant $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On admet que T_n est de degré n .

a) i) écrire une fonction `poly(n)` qui renvoie le polynôme T_n , en utilisant la librairie `numpy.polynomial`.

ii) Afficher les fonctions polynomiales T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5 sur $[-1, 1]$ et compter leurs zéros.

iii) Vérifier que les polynômes de la suite (T_n) commutent entre eux pour la loi de composition. En est-il de même pour tous les polynômes ?

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

c) Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$.

Montrer que $2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m}$ et $T_n \circ T_m = T_{nm}$.

d) Montrer que T_n vérifie l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$.

8. a) Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(X + 10^k) - P(X) = 10^k Q(X)$. Que dire de Q si P est à coefficients dans $\mathbb{N}$?

b) Lorsque P n'est pas constant, déterminer degré et coefficient dominant de Q en fonction de ceux de P .

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $s(n)$ la somme des chiffres dans l'écriture décimale de n .

i) Écrire une fonction Python prenant n en entrée et renvoyant $s(n)$.

ii) Justifier la terminaison et la correction de l'algorithme utilisé.

iii) En examinant des exemples, conjecturer si la suite $(s(P(n)))_{n \in \mathbb{N}}$ peut être bornée.

On suppose dans la suite que P est à coefficients dans $\mathbb{N}$.

d) On note k le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de $P(n)$.

Montrer que $s(P(n + 10^k)) > s(P(n))$.

e) Démontrer la conjecture formulée en c) iii).

f) La suite $(s(P(n)))_{n \in \mathbb{N}}$ admet-elle une sous-suite bornée ?

g) Existe-t-il $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant tel que la suite $(s(|P(n)|))_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée ?

9. On dit que $x \in \mathbb{R}^+$ est μ -approachable (avec $\mu \in \mathbb{R}$) s'il existe une constante $c > 0$, et une infinité de rationnels $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ tels que $\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{c}{q^\mu}$. On note $\mu(x)$ la borne supérieure de l'ensemble des réels vérifiant l'assertion ci-dessus pour ce x , quitte à ce que ce soit $+\infty$.

Un nombre réel positif x est dit algébrique d'ordre n s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n tel que $P(x) = 0$ et que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X]$ de degré inférieur strictement à n , $Q(x) \neq 0$. Un nombre transcendant est un nombre qui n'est pas algébrique.

On cherche à montrer le théorème suivant : *Si x est algébrique d'ordre n alors $\mu(x) \leq n$.*

a) i) Écrire une fonction Python `fibonacci` qui a un entier n associe F_n la n -ième valeur de la suite de Fibonacci définie par $F_0 = F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Que vaut F_{200} ?

ii) Écrire une fonction `test_approximation` qui à (x, p, q, c, n) associe `True` si $\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{c}{q^\mu}$ et `False` sinon.

iii) Vérifier que : $\forall 1 \leq n \leq 12, \left| \varphi - \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5} F_{2n-1}^2}$.

iv) Écrire une fonction `meilleure_approximation` qui à x, n associe (p, q) , où $\frac{p}{q}$ est la meilleure approximation de x par un rationnel dont q possède n chiffres exactement.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout entier q , il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $|qx - p| \leq 1$. En déduire que $\mu(x) \geq 1$.

c) Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{p}{q}$ des rationnels distincts.

i) Montrer que $\left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{bq}$.

ii) En déduire que $\mu(x) = 1$ pour tout rationnel x .

d) Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est au plus dénombrable. Déduire qu'il existe au moins un nombre transcendant. *Ind.* On rappelle que, si ϕ est une surjection de A (dénombrable) dans B , alors B est au plus dénombrable.

e) Soient x un nombre algébrique d'ordre n , P un polynôme de $\mathbb{Z}_n[X]$ tel que $P(x) = 0$, $M = \sup_{x \in \{0, \dots, n\}} \left| \frac{a_0}{a_n} \right|$.

i) Montrer que P ne possède pas de racine de module supérieur à $1 + M$.

ii) Montrer le théorème.

f) Montrer que le nombre $N = \sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-n!}$ est transcendant.

10. On dit que a est algébrique s'il existe $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(a) = 0$. On pose $I(a) = \{p \in \mathbb{Q}[X], P(a) = 0\}$.

a) Démontrer que $I(a)$ est un idéal de $\mathbb{Q}(X)$. Démontrer qu'il existe $\pi_a \in \mathbb{Q}[X]$ appelé polynôme minimal de a tel que $I(a) = \pi_a \mathbb{Q}[X]$.

b) On note S l'ensemble des nombres algébriques a tels que π_a appartient à $\mathbb{Z}[X]$, $|a| > 1$ et toute racine de π_a différente de a a un module < 1 . On note E l'ensemble des polynômes minimaux des éléments de S .

- i) Démontrer que $\mathbb{Q} \cap S = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ et que $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \in S$.
- ii) Démontrer que $S \subset \mathbb{R}$.
- c) On pose $P_1 = X^3 - X - 1$, $P_2 = X^3 + X + 1$, $P_3 = X^4 - X^3 - 1$.
Or suppose que P_1, P_2 et P_3 sont les polynômes minimaux de leurs racines.
- i) Écrire un programme évaluant si ces polynômes appartiennent à E .
- ii) Pour les polynômes P_1, P_2 et P_3 appartenant à E , évaluer à la précision 10^{-13} la valeur de $a \in S$ correspondante.
- d) Évaluer les 70 premiers termes des suites : $(a^n - \lfloor a^n \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=0}^n \sin^2(a^n \pi) \right)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Que pouvez-vous conjecturer?
- e) Démontrer que π_a est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. En déduire que les racines de π_a sont simples.
- f) Montrer que la matrice compagnon associée à π_a est diagonalisable.

11. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On désigne par Φ l'application qui à

$P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ associe la reste de la division euclidienne de PF par $X^n - 1$.

- a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.
- b) i) Pour $n = 4$, écrire en Python une fonction d'argument F qui renvoie la matrice canonique de Φ . La tester pour $F = 1 + X + X^2 + X^3$.
- ii) Tester avec d'autres polynômes de degré 3 et renvoyer les vecteurs propres associés. Conjecture?
- c) Écrire la matrice de Φ dans la base canonique. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable?

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres complexes distinctes de A et $m_1, \dots, m_p$ leurs multiplicités respectives.

On pose alors $Q_A(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$.

- a) On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

i) Écrire une fonction PYTHON prenant en argument un polynôme P et retournant le PGCD de P et P' .

ii) On pose $A_0 = A$ et $A_{n+1} = A_n - Q_A(A_n)Q_A(A_n)^{-1}$.

Calculer avec PYTHON les matrices A_n pour $n \in \llbracket 0, 20 \rrbracket$ en admettant provisoirement le résultat de la question c). Que constate-t-on?

iii) Recommencer en utilisant la matrice B au lieu de la matrice A .

On revient au cas général.

b) Montrer que Q'_A et χ_A sont premiers entre eux.

c) Montrer que $\chi_A = Q_A \text{PGCD}(\chi_A, \chi'_A)$.

d) Soient R un anneau, $n \in R$ un élément nilpotent et $j \in R$ un élément inversible tels que $nj = jn$. Montrer que $n + j$ est inversible.

e) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit (P_n) : « A_n existe, est un polynôme en A et vérifie $Q'_A(A_n)$ inversible et $Q_A(A_n) \in Q_A(A)^{2^n} \mathbb{C}[A]$ ». Montrer que la propriété (P_n) est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite (A_n) est bien définie.

f) Montrer que la suite (A_n) converge vers une matrice D diagonalisable et que $N = A - D$ est nilpotente. Justifier que N et D sont polynômes en A .

13. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $B_0 = a_0 I_n$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$: $B_i = a_i I_n + B_{i-1} A$. Soit $P = \sum_{i=0}^m a_i X^{m-i}$.

a) i) Écrire une fonction prenant en argument A , $(a_0, \dots, a_m)$ et i , et qui renvoie B_i .

ii) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $m = 3$ et $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 3, 4)$. Vérifier numériquement que $P(A) = B_m$.

iii) Montrer en général que $B_m = P(A)$. Quelle méthode a-t-on utilisé pour calculer $P(A)$ en fonction des B_i ?

b) On pose $a_0 = 1$, $a_i = -\frac{1}{i} \text{tr}(B_{i-1} A)$. Écrire une fonction calculant $(a_0, \dots, a_m)$. Avec la matrice de l'exemple précédent et la fonction `np.poly`, comparer les coefficients de χ_A et $(a_0, \dots, a_m)$.

c) Montrer que pour tout réel x , $(xI_n - M)(xI_n - N) = x^2 I_n - x(M + N) + MN$. A-t-on pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(X - M)(X - N) = X^2 - X(M + N) + MN$?

d) i) Montrer que, pour tout réel x , $P(x)I_n - P(A) = (xI_n - A) \sum_{i=0}^{m-1} x^{m-i-1} B_i$.

ii) On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)I_n - B_m = (xI_n - A) \sum_{i=0}^{m-1} x^{m-i-1} B_i$. Montrer qu'il s'agit de la suite définie ici.

e) i) On pose $C(x) = \text{Com}(xI_n - A)^T$. Montrer qu'il existe $C_0, \dots, C_{m-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $C(x) = \sum_{i=0}^{m-1} x^{m-i-1} C_i$.

ii) En considérant $\chi_A(x)I_n$, montrer le théorème de Cayley-Hamilton.

14. a) On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est $(*)$ s'il existe un entier $i \in \{2, \dots, n\}$ tel que $A^i = A$. On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

i) Coder une fonction `genere.matrice(n, a)` qui renvoie une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec ses coefficients pris aléatoirement dans $[-a, a]$.

ii) Coder une fonction `test.etoile(A)` qui renvoie `True` si la matrice A est $(*)$ et appartient à $GL_n(\mathbb{R})$, et `False` sinon.

iii) Coder une fonction `genere.etoile(n, a)` qui renvoie une matrice $(*)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec ses coefficients pris aléatoirement dans $[-a, a]$.

iv) Coder une fonction qui calcule la proportion de matrices $(*)$ dans les matrices à coefficients dans $[-a, a]$ pour des matrices de $\mathcal{M}_i(\mathbb{R})$ pour i variant dans $\{2, \dots, n\}$.

v) Tracer sur un même graphique ces proportions pour a variant dans $[2, 6]$.

b) Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Soit $\ell \geq 2$ un entier.

i) Montrer que si u est diagonalisable, alors u^ℓ est diagonalisable.

ii) Donner un exemple de $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour un certain entier $\ell \geq 2$, u^ℓ soit diagonalisable mais que u ne le soit pas.

c) On suppose dans cette partie que u^ℓ est diagonalisable.

i) Montrer qu'il existe des scalaires distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ tels que :

$$(u^\ell - \alpha_1 \text{id}_E) \circ \dots \circ (u^\ell - \alpha_p \text{id}_E) = 0.$$

ii) Si les valeurs propres α_i de u^ℓ sont toutes non nulles, montrer que u est diagonalisable. On suppose toujours que u^ℓ est diagonalisable.

iii) Montrer que $\ker(u^\ell)$ est un sous-espace stable par u .

iv) Montrer que si u est diagonalisable, alors $\ker(u^\ell) = \ker(u)$.

v) Montrer que si $\ker(u^\ell) = \ker(u)$ alors u est diagonalisable.

vi) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur u pour qu'il soit diagonalisable.

15. On pose $H_0 = I_n$ et, pour $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $H_u = I_n - 2 \frac{uu^T}{u^T u}$.

a) Montrer que, si $u \neq 0$, H_u est la matrice de la réflexion par rapport à l'hyperplan $\text{Vect}(u)^\perp$.

b) Montrer que toute réflexion est de la forme H_u pour un certain u .

c) Programmer la fonction $u \mapsto H_u$.

d) Si $v \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Vect}(e_1)$ et $u = v - \|v\|e_1$, montrer que $H_u v = \|v\|e_1$. *Ind.* Montrer que $H_u x = x - 2 \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} u$.

e) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ tels que $H_u A = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

f) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe des matrices $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure telles que $M = QR$.

g) Montrer que, pour tout $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\det(M)|^2 \leq \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{i,j}^2$.

16. Soit $n \geq 2$. On note $\mathcal{S} = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}$ dont la diagonale est nulle. Une matrice $A \in \mathcal{S}_0$ est dite euclidienne s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{R}^p$ tels que $a_{i,j} = \|X_i - X_j\|^2$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$. On dit alors que A est associée à $X_1, \dots, X_n$.

On note $I = I_n$ et $U = (1, \dots, 1)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $M = I - \frac{1}{n} U U^T$. On pose enfin

$$f : A \in \mathcal{S} \mapsto -\frac{1}{2} M A M.$$

a) Soit $A \in \mathcal{S}$ telle que $\text{Sp}(f(A)) \subset \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\Delta = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$ avec $\lambda_i > 0$ pour $1 \leq i \leq k$ tels que $f(A) = P \Delta^2 P^T$.

b) i) Écrire une fonction PYTHON prenant en argument une matrice $X \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et renvoyant la matrice euclidienne associée aux colonnes de X .

ii) Écrire une fonction PYTHON qui, à une matrice $A \in \mathcal{S}$, associe $f(A)$.

iii) En testant sur des matrices euclidiennes aléatoires avec $n = 5$ et $p \in \{2, 3, 4, 5\}$ (on prendra des vecteurs aléatoires à coordonnées entières dans la fonction **b) i)**), calculer les valeurs propres de $f(A)$. Que remarque-t-on ?

iv) Écrire une fonction PYTHON qui prend en argument $A \in \mathcal{S}$ telle que $\text{Sp}(f(A)) \subset \mathbb{R}^+$, calcule P et Δ comme décrites en question **a)**, puis renvoie la matrice X constituée des k premières lignes de ΔP^T .

Ind. Si $L = [t_1, \dots, t_m]$ est une liste d'entiers et A est une matrice, l'instruction $A[:, L]$ renvoie une matrice dont les lignes sont, dans l'ordre, les lignes $t_1, \dots, t_m$ de A .

v) Sur des matrices euclidiennes aléatoires, calculer la matrice X de la question précédente, puis la matrice euclidienne associée aux colonnes de X . Que remarque-t-on ?

c) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}$. On pose $\bar{a}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n$, puis $\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{a}_i$.

i) Montrer que la coefficients d'indices (i, j) de $f(A)$ est $\frac{1}{2}(\bar{a}_i + \bar{a}_j - a_{i,j} - \bar{a})$.

ii) En déduire que f est injective sur $\mathcal{S}_0$.

iii) Calculer $f(A)U$.

d) Soit A euclidienne. Justifier l'existence d'un entier $p \in \mathbb{N}^*$ minimal, appelé type de A , tel qu'il existe $Y_1, \dots, Y_n \in \mathbb{R}^p$ tels que $Y_1 + \dots + Y_n = 0$ et que A soit associée à $Y_1, \dots, Y_n$.

17. On fixe un entier $n \geq 1$ et on pose $f : A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$.

a) Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

b) Déterminer le maximum et le minimum de f lorsque $n = 2$.

c) i) Écrire une fonction `aleatoireR3` qui renvoie un vecteur aléatoire unitaire de $\mathbb{R}^3$.

ii) Écrire une fonction `orthogonal` qui prend en entrée un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et renvoie un vecteur unitaire orthogonal à celui-ci.

iii) En utilisant le produit vectoriel, écrire une fonction `aleatoireO3` qui renvoie une matrice aléatoire de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

iv) Utiliser les fonctions précédentes pour conjecturer les valeurs des bornes de f lorsque $n = 3$.

d) Montrer que f est majorée par $n\sqrt{n}$.

e) Montrer que $\max f = n\sqrt{n}$ si et seulement si $B_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\}), A^T A = nI_n\}$ est non vide.

18. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est bistochastique si ses coefficients sont positifs et vérifient

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,j} = 1 \text{ pour tous } 1 \leq i, j \leq n.$$

a) i) Écrire une fonction PYTHON `Test(A)` qui vérifie si la matrice A est bistochastique.

ii) Écrire une fonction PYTHON `Indice` qui prend en argument une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et renvoie, s'il existe, un triplet (k, ℓ, m) d'entiers tels que k est le plus petit entier tel que $a_{k,k} \neq 1$, et $\ell, m > k$ tels que $a_{\ell,k} \neq 0$ et $a_{k,m} \neq 0$.

iii) écrire une fonction PYTHON f prenant en argument une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et retournant $A + \min(a_{\ell,k}, a_{k,m})(E_{k,k} - E_{\ell,k} - E_{k,m} + E_{\ell,m})$ où $(k, \ell, m) = \text{Indice}(A)$ s'il existe.

iv) Écrire une fonction PYTHON `N` qui prend en argument une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et deux n -uplets réels α et β , et renvoie $\sum_{i=1}^n a_{i,j} \alpha_i \beta_j$.

v) Écrire une fonction PYTHON `Suite` prenant en argument $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{N}^*$ et qui retourne les listes $[A, f(A), \dots, f^p(A)]$ et $[N(A, \alpha, \beta), \dots, N(f^p(A), \alpha, \beta)]$. Qu'observe-t-on dans le cas où A est bistochastique différente de l'identité et α, β strictement décroissants ?

b) Montrer que `Indice(A)` existe si A est bistochastique différente de l'identité.

c) Montrer que $N(A) < N(f(A))$ si α et β sont strictement décroissants.

d) On suppose $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ strictement décroissants. Montrer que N admet un maximum sur l'ensemble des matrices bistochastiques de taille n , atteint en l'identité.

e) Montrer que le résultat précédent reste valable si on suppose seulement α et β décroissants.

f) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On admet qu'il existe des matrices $P_1, Q_1, P_2, Q_2 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D_1 = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $D_2 = \text{Diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ avec $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0$ et $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n \geq 0$ telles que $A = P_1 D_1 Q_1^T$ et $B = P_2 D_2 Q_2^T$.

i) Montrer l'existence de $P, Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{tr}(AB) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} p_{i,j} \alpha_i q_{j,i} \beta_j$.

ii) Montrer que, si $R = (r_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la matrice $(r_{i,j}^2)_{1 \leq i, j \leq n}$ est bistochastique.

iv) En déduire que $|\text{tr}(AB)| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$.

v) On suppose A et B symétriques positives. Montrer que $|\text{tr}(AB)| \leq \text{tr}(A)\text{tr}(B)$.

19. On considère la fonction $\mu : (O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto OS \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que la fonction μ est bien définie.

b) i) Écrire une fonction PYTHON `generer_diagonale_positive(n)` qui retourne une matrice diagonale de taille n dont les coefficients diagonaux sont tirés aléatoirement dans l'intervalle $]0, 10[$.

ii) Écrire une fonction PYTHON `generer_Snplusplus(n)` qui retourne une matrice symétrique définie positive de taille n aléatoire à valeurs propres dans $]0, 10[$.

On pourra utiliser la fonction `ortho_group` importée du module `scipy.stats` : la commande `ortho_group.rvs(dim=n)` génère aléatoirement une matrice orthogonale de taille n .

iii) Écrire une fonction PYTHON `test_Snplusplus(A)` qui vérifie si une matrice réelle A appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ en considérant que deux coefficients numériques sont égaux si leur différence est inférieure à 10^{-5} .

iv) Pour $n = 3$, générer aléatoirement 10000 couples (O, S) , calculer le déterminant des matrices OS obtenues et représenter graphiquement la liste croissante des valeurs obtenues.

c) Montrer que la fonction μ est continue.

d) i) Montrer que, pour toute matrice $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $M^T M = S^2$.

ii) En déduire que μ est surjective.

e) On admet que deux matrices diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables. Soient deux couples (O, S) et (O', S') tels que $\mu(O, S) = \mu(O', S')$.

- i) Montrer que $S^2 = S'^2$.
 - ii) Montrer que S est un polynôme en S' .
 - iii) En déduire que μ est injective.
- f) i) Montrer que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- ii) Déterminer l'adhérence de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - iii) Montrer que, si la suite $(M_p)_{p \geq 1}$ de matrices de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ converge vers $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $\mu^{-1}(M_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \mu^{-1}(M)$.

20. On considère que deux matrices sont égales si leurs coefficients diffèrent de moins de $\varepsilon = 10^{-12}$.

- a) i) écrire une fonction PYTHON `test_orthogonal(A)` qui vérifie si la matrice A est orthogonale. La tester pour $M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 4 & 8 & 1 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.

Un endomorphisme d'un espace euclidien est normal s'il commute avec son adjoint.

- ii) Écrire une fonction PYTHON `test_normal(A)` qui vérifie si une matrice A est normale. Vérifier que M est normale.

- iii) Écrire une fonction PYTHON `genere_mat_normale(n)` qui génère aléatoirement une matrice normale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $[-9, 9]$, qui ne soit ni symétrique ni antisymétrique. Afficher le nombre de tours de boucle.

- b) Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- i) Montrer que, si un sous-espace vectoriel F de E est stable par u , son orthogonal est stable par u^* .

- ii) On suppose que u est normal. Montrer que, pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$, l'orthogonal de l'espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par u .

On veut montrer que si u est normal, il existe une base B orthogonale dans laquelle u a une matrice diagonale par blocs de taille 1 ou 2, les blocs de taille 2 étant de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

On procède par récurrence sur la dimension de l'espace E , et on remarque que c'est vrai en dimension 1.

Supposons le résultat acquis jusqu'en dimension n et soit u un endomorphisme normal d'un espace euclidien E de dimension $n + 1$.

c) Supposons que u a une valeur propre réelle. Conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence sur un endomorphisme d'un espace de dimension strictement inférieure.

d) On suppose maintenant que u n'a aucune valeur propre réelle.

- i) Soit Q un facteur irréductible de π_u . Quel est le degré de Q ?

- ii) Montrer que $\ker Q(u) \neq \{0\}$.

- iii) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice normale sans valeur propre réelle.

Montrer l'existence de $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$ tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

- iv) Montrer que $\ker Q(u)$ est stable par u et u^* .

- v) Conclure.

Analyse

21. Soit $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable. Le but de cet exercice est de montrer que l'ensemble des points où h' est continue est dense. On admet le théorème suivant :

Si $(F_n)_{n \geq 0}$ est une famille de fermés d'intérieurs vides de $\mathbb{R}$ alors $\bigcup_{n \geq 0} F_n$ est d'intérieur

vide. Si $(\Omega_n)_{n \geq 0}$ est une famille d'ouverts denses de $\mathbb{R}$ alors $\bigcap_{n \geq 0} \Omega_n$ est dense.

a) On pose $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $g(0) = 0$. Tracer le graphe de g entre -0.3 et 0.3 . Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que g n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) On pose $m : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sin(k^2 x)$. Tracer le graphe de m entre -2 et 2 puis entre -5 et 5 .

Que remarque-t-on ?

c) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ et que $\overline{\mathbb{R} \setminus A} = \mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{A}$.

d) Montrer que si F est un fermé d'intérieur vide alors $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert dense.

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est la limite simple de $(f_n)_{n \geq 0}$, une suite de fonctions continues.

Pour dans $n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$, on pose $F_{n,a} = \{x \in \mathbb{R} ; \forall p \geq n, |f_n(x) - f_p(x)| \leq a\}$ et $\Omega_a = \bigcup_{n \geq 0} F_{n,a}$. Soit $\varepsilon > 0$.

e) Montrer que $F_{n,\varepsilon}$ est fermé.

f) Calculer $\bigcup_{n \geq 0} F_{n,\varepsilon}$.

g) Si $x_0 \in \Omega_\varepsilon$, montrer que $\exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq 3\varepsilon$.

On pose $G = \mathbb{R} \setminus \Omega_\varepsilon$.

h) Calculer l'intérieur de $G \cap F_{n,\varepsilon}$.

i) En déduire que Ω_ε est un ouvert dense.

j) Montrer que f est continue en tout point de $U = \bigcap_{n \geq 0} \Omega_{1/n}$.

k) En déduire le résultat pour h .

l) Montrer l'équivalence entre les deux assertions du théorème.

22. Soit $n \geq 2$. On pose $K_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in]-1, 1[^n, x_1 < \dots < x_n\}$.

Soit $f_n : (x_1, \dots, x_n) \in K_n \mapsto -\sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^2) - 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(x_j - x_i)$.

a) Écrire une fonction f prenant en argument une liste $[x_1, \dots, x_n]$ et calculant $f_n(x_1, \dots, x_n)$.

b) On pose $r_n = \left(\cos \left(\frac{2n - i - 1}{2n} \pi \right) \right)_{1 \leq i \leq n}$.

i) Montrer que $r_n \in K_n$.

ii) Donner une approximation de $f_3(r_3), f_4(r_4), f_5(r_5)$ à l'aide de PYTHON.

iii) Conjecturer un équivalent de $f_n(r_n)$.

c) L'ensemble K_n est-il ouvert ? fermé ? convexe ?

d) La fonction f_n est-elle bornée sur K_n ?

e) Montrer que la fonction f_n est convexe.

f) Soient U un ouvert convexe et $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^2$ sur U . Montrer que, si φ atteint en $x_0 \in U$ un minimum local, alors ce minimum est global.

23. Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, on note $\|f\|_{\text{op}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_2}$ où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$. On note Σ la boule unité de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\text{op}}$, R (resp. S) l'ensemble des rotations (resp. réflexions) de $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que $R \cup S \subset \Sigma$. Pour $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, on note $[u, v] = \{(1-t)u + tv, t \in [0, 1]\}$ et $]u, v[= \{(1-t)u + tv, t \in]0, 1[\}$.

b) i) On représente un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ par sa matrice en base canonique.

En utilisant le module `numpy.random`, écrire une fonction PYTHON `norme` qui prend en argument une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et retourne la norme-opérateur de l'endomorphisme canoniquement associé.

ii) En testant sur des exemples, vérifier avec PYTHON que, pour $r \in R$ et $s \in S$, on a $[r, s] \subset \Sigma$.

c) Soient $r \in R$ et $s \in S$. Montrer que $[r, s] \subset \Sigma$ et que $]r, s[\cap \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \emptyset$.

Ind. On pourra se ramener à $r = \text{id}$.

d) On admet que, pour toute $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il existe $U, V \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et D matrice diagonale positive telles que $M = UDV$. Montrer que $\forall f \in \Sigma, \exists (r, s) \in R \times S, f \in [r, s]$.

24. On note $\mathbb{D}^\times$ l'ensemble des décimaux inversibles, i.e. l'ensemble des décimaux non nuls dont l'inverse est décimal. Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{D}^\times$ est dense dans $\mathbb{R}$. Le problème étant symétrique en $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$, on peut se restreindre à l'ensemble $\mathbb{D}_+^\times$ des décimaux inversibles positifs. On pose $E = \{2^\alpha 5^\beta, (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2\}$.

a) i) Écrire une fonction `transforme` sur Python prenant en argument un décimal d et renvoyant le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n d \in \mathbb{Z}$. La tester avec 0.447.

ii) Écrire une fonction `décimal_inversible` sur Python prenant en argument un décimal $d > 0$ et renvoyant `True` s'il est inversible et `False` sinon. L'utiliser pour afficher tous les décimaux entiers inversibles entre 1 et 100.

iii) Tracer sur Python le nombre de décimaux entiers inversibles entre 1 et n pour $n \in [1, 10^5]$.

b) On admet le lemme suivant : un sous-groupe H de $(\mathbb{R}, +)$ est soit monogène, soit dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que $E = \mathbb{D}_+^\times$.

c) On pose $G = \{\alpha \ln(2) + \beta \ln(5), (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2\}$.

i) Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

ii) Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $x = \sum_{i=-\infty}^m x_i 10^i$ son écriture décimale et, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$N_n = \sum_{i=0}^{m+n} x_{i-n} 10^i.$$

On cherche une suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, |x - \delta_n| \leq 10^{-n}$.

i) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2, N_n 10^\beta \leq 2^\alpha < (N_n + 1) 10^\beta$.

ii) En déduire que, si on pose $\delta_n = 10^{-\beta} 10^{-n} 2^\alpha$, la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie bien la propriété voulue.

25. Une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de réels de $[0, 1]$ est équirépartie si

$$\forall a < b \in [0, 1], \frac{S_n(a, b)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b - a \text{ où } S_n(a, b) = \text{Card}(\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a \leq u_k \leq b\}).$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x .

a) Montrer que, si une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie dans $[0, 1]$, alors elle y est dense.

La réciproque est-elle vraie ?

b) i) Écrire une fonction PYTHON `S(u,n,a,b)` calculant $S_n(a, b)$ pour la suite $u \in [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$.

ii) La tester avec $u_n = \{\sqrt{2n}\}$, $v_n = \cos(n)$ et $w_n = \{n/2\}$. Ces suites semblent-elles équiréparties ?

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on pose : } D_n = \sup_{0 \leq a < b \leq 1} \left| \frac{S_n(a, b)}{n} - (b - a) \right| \text{ et } D_n^* = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \left| \frac{S_n(0, \alpha)}{n} - \alpha \right|.$$

c) Écrire une fonction PYTHON `D(u,n)` calculant D_n pour la suite $u \in [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$.

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n^* \leq D_n \leq 2D_n^*$.

e) Montrer qu'une suite $u \in [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de limite nulle.

f) Soit $u \in [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$. On veut montrer l'équivalence entre :

(A) u est équirépartie,

(B) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f$ pour toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue,

(C) $\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp(2i\pi p u_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

i) Montrer (A) $\Rightarrow$ (B).

ii) Montrer que (B) $\Rightarrow$ (A).

Ind. Pour $a < b \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$, on pourra montrer l'existence de ψ_ε et ϕ_ε continues sur $[0, 1]$ telles que $\psi_\varepsilon \leq \mathbf{1}_{[a,b]} \leq \phi_\varepsilon$ et $\int_0^1 (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

iii) On admet que toute fonction continue et 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions de l'espace $T = \text{Vect}(e_k, k \in \mathbb{Z})$ où $e_k : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{2i\pi kt}$.

Montrer que (B) $\Leftrightarrow$ (C).

Ind. Pour (C) $\Rightarrow$ (B), on pourra commencer par $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ telle que $f(0) = f(1)$.

g) Soit $\theta > 0$. Montrer que la suite $(\{n\theta\})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si $\theta \notin \mathbb{Q}$.

Probabilités

26. Soit $n \geq 2$. On considère l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des transpositions de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des permutations paires.

a) Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est représentée par la liste $[\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)]$.

i) Écrire une fonction PYTHON `compose` qui prend en argument deux permutations σ et τ et retourne $\sigma \circ \tau$.

ii) Écrire une fonction PYTHON `transposition_alea` qui prend en argument l'entier n et retourne une transposition aléatoire de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

iii) Écrire une fonction PYTHON `composition_transposition` qui prend en argument les entiers n et k , et retourne la composée de k transpositions tirées aléatoirement, indépendamment et uniformément dans $\mathcal{T}_n$.

iv) Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_3$ et tout $k \in \{31, 32, 33, 34\}$, calculer la probabilité que `composition_transposition(3, k)` renvoie σ . Commenter et conjecturer un résultat. On considère une suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\mathcal{T}_n$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $X_k = T_k \circ T_{k-1} \circ \cdots \circ T_1$ et $X_0 = \text{id}$.

b) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(X_k \in \mathcal{A}_n)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $\tau \in \mathcal{T}_n$. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{P}(T_k = \tau)$.

d) Soient $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbf{P}(X_{k+1} = \sigma) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_n} \mathbf{P}(X_k = \tau \circ \sigma)$.

e) Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $U_k = (\mathbf{P}(X_k = \sigma))_{\sigma \in \mathcal{S}_n}^T \in \mathcal{M}_{n!,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n!}(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $U_{k+1} = MU_k$. Préciser, pour $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$, la valeur de $M_{\sigma, \sigma'}$ (les cases de M sont indexées par les éléments de $\mathcal{S}_n$).

En déduire l'expression de U_k en fonction de M et k .

f) Montrer que la matrice M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

g) Montrer que $\text{Sp}(M) \subset [-1, 1]$ et préciser les espaces propres associés à 1 et -1 .

h) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Calculer les limites de $\mathbf{P}(X_{2k} = \sigma)$ et $\mathbf{P}(X_{2k+1} = \sigma)$ quand $k \rightarrow +\infty$. Commenter.

i) En utilisant la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, construire une suite $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires telle que $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(Y_k = \sigma) = \frac{1}{n!}$.

27. Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telles que $X \sim Y$. On veut établir l'inégalité (*) : $\mathbf{E}(X/Y) \geq 1$.

Soient U, V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de même loi. On veut établir l'inégalité (**) : $\mathbf{E}(|U - V|) \leq \mathbf{E}(|U + V|)$.

a) En Python tester (*) sur des lois binomiales et géométriques

b) Faire de même pour (**) avec des lois binomiales, Poisson, ...

c) Tracer à l'aide de python la fonction : $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} dt$ sur $[-3, 3]$. Conjecture ?

d) Montrer (*) dans le cas où X et Y sont indépendantes.

Ind. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

e) On suppose que $\ln(X)$ est d'espérance finie, montrer (*).

Ind. Commencer par montrer que : $\ln(x) \leq x - 1$.

f) Soient $a, b > 0$ Montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

g) Montrer (*).

h) Vérifier la conjecture établie à la question c).

i) Montrer (**).

Centrale II - Python – PSI

Algèbre

28. Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ sont deux polynômes complexes, on appelle résultant de P et Q et l'on note $\text{Res}(P, Q)$ le déterminant de la matrice

$$S(P, Q) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & \dots & b_0 & 0 & \dots \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_n & \dots & \dots & b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

a) Coder $\text{Res}(P, Q)$ pour P et Q de degré 2.

b) Calculer $\text{Res}(P, Q)$ pour

i) $P = (X - 1)(X - 2)$ et $Q = (X - 1)(X - 3)$,

ii) $P = (X - 1)(X - 2)$ et $Q = (X - 3)(X - 4)$,

iii) $P = X^2 - 2X + 1$ et $Q = X^2 - 2$.

c) Que peut-on conjecturer ?

Soit $\varphi : (U, V) \in \mathbb{C}_{m-1}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X] \mapsto PU + QV$.

d) Montrer que φ est linéaire et à valeurs dans $\mathbb{C}_{n+m-1}[X]$.

e) Montrer que φ est injective si et seulement si P et Q n'ont pas de racine complexe commune.

f) On pose $\mathcal{B} = ((1, 0), \dots, (X^{m-1}, 0), (0, 1), \dots, (0, X^{n-1}))$ et $\mathcal{B}' = (1, \dots, X^{n+m-1})$.

Montrer que $S(P, Q)$ est la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ au départ et la base $\mathcal{B}'$ à l'arrivée.

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré n , on pose $\text{Dis}(P) = \text{Res}(P, P')$.

g) Montrer que P est à racines simples si et seulement si $\text{Dis}(P) \neq 0$.

h) Soit $P = aX^2 + bX + c$ de degré 2. Montrer que P admet deux racines complexes distinctes si et seulement si $b^2 - 4ac \neq 0$.

29. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $S(P) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)}{k!}$.

a) i) Écrire une fonction `fact` permettant de calculer la factorielle des entiers.

ii) Calculer avec Python $\frac{1}{e} \sum_{k=0}^{50} \frac{P(k)}{k!}$ avec $P = X^d$ pour $d \in \{1, \dots, 10\}$, puis avec

$P = X^9 + 36X^6 - X^3 + X^2 - 3$. À quel ensemble $S(P)$ semble-t-il appartenir ?

b) i) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{P(k)}{k!}$ converge. On note $S(P)$ la somme.

Montrer que l'application $P \mapsto S(P)$ est une forme linéaire.

ii) Soit (H_n) la suite de polynômes définie par $H_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = (X - n)H_n$. Montrer que $(H_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

iii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S(H_n)$.

iv) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à coefficients entiers. Montrer que les coordonnées de P dans la base $(H_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont entières. Démontrer la conjecture de la première question.

30. Soit $n \geq 2$. On pose N_n la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf $(N_n)_{i,i+1}$ qui vaut 1 pour tout i . On pose également R_n triangulaire supérieure avec $(R_n)_{i,i+j} = a_j$ avec $a_0 = 1$ et $a_j = \frac{(-1)^{j-1}}{j2^{j-1}} \binom{2j-2}{j-1}$.

- a) i)** Écrire un code Python permettant de calculer N_n (on utilisera `np.zeros`).
- ii)** Calculer N_n^n (`np.dot` ou `np.linalg.matrix.power`). Que peut-on conjecturer?
- iii)** Prouver la conjecture.
- b) i)** Écrire un code Python permettant de créer R_n (on utilisera la fonction `binom(n,p)` de la bibliothèque `scipy.special`).
- ii)** Conjecturer R_n^2 .
- c)** Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré au plus n tel que $\sqrt{1+x} = P_n(x) + o(x^n)$. Déterminer ses coefficients.
- d)** Montrer que le polynôme $P_n^2(X) - 1 - X$ est divisible par X^n .
- e)** En déduire une matrice dont le carré vaut $I_n + R_n$.

31. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{R}^n$, on pose $N_e(x) = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_k(f, e, x) = \sqrt[k]{N_e(f^k(x))}$.

- a)** Si e est une base de $\mathbb{R}^n$, montrer que N_e est une norme.
- b)** Dans cette question, $A = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ est la matrice canoniquement associée à f et e est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
 - i)** Tracer $(k, \alpha_k(f, e, x))$ pour $1 \leq k \leq 50$ avec $x = e_1$, $x = e_1 + e_2 + e_3$, puis $x = e_1 - e_3$. Faire de même pour $1 \leq k \leq 500$. Commenter.
 - ii)** Montrer que $v = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ où $v_1 = e_1 - e_3$, $v_2 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $v_3 = e_1 - e_2$.
 - iii)** Donner la matrice de f dans la base v .
 - iv)** On pose $w = e_1 + \frac{1}{10}e_2 + \frac{1}{100}e_3$. Exprimer w dans la base v .
 - v)** Tracer $(k, \alpha_k(f, e, w))$ et $(k, \alpha_k(f, v, w))$ sur le même graphe. Commenter.
- c) i)** On considère $(u_k)_{k \geq 1}$ et $(v_k)_{k \geq 1}$ deux suites réelles qui convergent respectivement vers ℓ et m . Montrer que $(\max(u_k, v_k))_{k \geq 1}$ tend vers $\max(\ell, m)$. Généraliser pour d suites.
- ii)** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ diagonalisable. Soit e la base de ses vecteurs propres. Étudier la convergence de $(\alpha_k(f, e, x))_{k \geq 1}$.

32. Pour $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, on pose $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + X^n$ et $A_P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

- a) i) Écrire une fonction Python qui prend en argument un polynôme P et qui renvoie A_P .
 ii) Afficher A_P pour $P = (X - 1)^2(X - 3)$, $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$ et $X^2 - 3X + 2$.
 iii) Conjecturer le spectre de A_P et la dimension de ses sous-espaces propres.
- b) i) Calculer χ_{A_P} .
 ii) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A_P^T)$. Calculer $E_\lambda(A_P^T)$.
 iii) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A_P soit diagonalisable.
- c) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines de P comptées avec multiplicité et pour $k \in \mathbb{N}$ on note $P_k = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^k)$.
 i) Écrire une fonction Python qui prend en argument k et P et qui renvoie P_k .
 ii) Quelle conjecture peut-on faire ?
 iii) La démontrer.
- d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soient $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et X un vecteur propre associé.
 i) Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|\lambda x_i| \leq (1 + |a_{i,i}|) \|X\|_\infty$.
 ii) En déduire un disque dépendant des coefficients de A contenant toutes ses valeurs propres.

33. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{H}_n$ si et seulement si elle est à coefficients dans $\{-1, 1\}$ et ses colonnes sont orthogonales. On dit qu'elle est normalisée si sa première ligne et sa première colonne ne contiennent que des 1.

On importera `numpy`, `linalg` et `random`.

- a) Dénombrer les matrices de $\mathcal{H}_2$ avec Python.
- b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Montrer que $M \in \mathcal{H}_n$ si et seulement si $\frac{1}{\sqrt{n}}M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- c) Caractériser toutes les transformations géométriques associées aux matrices de $\mathcal{H}_2$.
- d) Montrer que si $A \in \mathcal{H}_n$ alors A^T aussi et qu'il en est de même si l'on multiplie par -1 une ligne ou une colonne de A .
- e) Dénombrer les matrices normalisées de $\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_4$ avec Python.
- f) Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. On note $(c_1, \dots, c_n)$ ses colonnes et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base orthonormée obtenue par l'algorithme de Gram-Schmidt à partir de $(c_1, \dots, c_n)$.
 On note $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P\varepsilon_k = c_k$.
- g) Caractériser MP^{-1} et en déduire que $\det(M)^2 = \det(P)^2$.
- h) Montrer que $|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^n \|c_i\|$.

Que donne cette inégalité sur $\mathcal{H}_n$? Vérifier avec Python.

34. On pourra utiliser `import numpy as np`, `import numpy.linalg as alg`.

On étudie la matrice $A_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad [A_n]_{i+1, j+1} = \frac{1}{n - i + j - 1} \binom{n}{i}.$$

- a) Écrire une fonction `mat(n)` qui renvoie A_n . On pourra utiliser `sc.comb(n, i)` pour le coefficient binomial après avoir validé `import scipy.special as sc`.

Étudier la diagonalisabilité de A_n pour $n \in \llbracket 2, 6 \rrbracket$.

b) i) Pour tous vecteurs $x, y \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, on pose $\langle x, y \rangle_n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{x_i y_j}{i+j+1}$, ce qui

définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

Écrire une fonction `prod_scal(x, y, n)` qui renvoie $\langle x, y \rangle_n$.

ii) Pour $n \in \llbracket 2, 8 \rrbracket$, étudier l'orthogonalité des sous-espaces propres des A_n .

On définit maintenant une application u sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(P)(x) = \int_0^1 (x-t)^n P(t) dt.$$

c) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que A_n est sa matrice dans la base canonique.

d) Montrer que u est autoadjoint pour le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt.$$

En déduire que A_n est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

35. Soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont strictement positifs.

a) i) Coder une fonction Python qui renvoie une matrice de $\mathcal{E}_n$ à coefficients entiers.

ii) Une matrice de $\mathcal{E}_n$ peut-elle avoir des valeurs propres négatives? Strictement négatives?

Soit $A \in \mathcal{E}_n$. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres et $(X_1, \dots, X_n)$ une base orthonormée telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $AX_i = \lambda_i X_i$.

b) Montrer que, pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, $Y^T A Y \leq \lambda_n \|Y\|^2$.

c) Conjecturer le signe des coefficients de X_n .

d) Étudier le cas d'égalité dans la question **b**).

e) Prouver la conjecture de la question **c**).

Analyse

36. On dit qu'une suite (u_n) converge vers a plus rapidement que (v_n) lorsque $u_n - a = o(v_n - a)$.

a) Si $n \geq 2$, on note u_n le demi-périmètre du polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans le cercle unité. Montrer que $u_n = 2^n \sin(\pi/2^n)$.

b) On pose $u'_n = \frac{4u_{n+1} - u_n}{3}$. Avec Python, calculer u_n et u'_n pour $n \in \{2, \dots, 10\}$. Quelles conjectures peut-on faire sur les limites de (u_n) et (u'_n) et sur leurs vitesses de convergence?

c) Soit (v_n) une suite vérifiant $v_n = a + \lambda k_1^n + O(k_2^n)$, où $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $0 < |k_2| < |k_1| < 1$. On pose $v'_n = \frac{v_{n+1} - k_1 v_n}{1 - k_1}$.

i) Comparer les vitesses de convergence de (v_n) et (v'_n) .

ii) En déduire une preuve de la conjecture faite en **b**).

d) On considère une suite (w_n) telle que, pour tout n , $w_n \neq w_{n-1}$, et admettant le même développement asymptotique qu'en **c)**. On pose $c_n = \frac{w_{n+1} - w_n}{w_n - w_{n-1}}$ et $w'_n = \frac{w_{n+1} - c_n w_n}{1 - c_n}$.

i) Montrer que (w'_n) est bien définie et qu'elle converge vers une limite à préciser.

ii) Comparer les vitesses de convergence de (w_n) et (w'_n) .

37. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On considère les suites $(y_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par $\forall n \geq 1, v_n = \frac{1}{n^\beta}$ et $\forall n \geq 2, y_n = \frac{1}{n \ln^2(n)}$. On dit qu'une suite (u_n) à termes strictement positifs vérifie (F_λ) ,

où $\lambda \in \mathbb{R}$, lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

a) À l'aide de Python, déterminer le réel λ tel que (v_n) vérifie (F_λ) . Étudier la convergence de $\sum v_n$. Démontrer ces résultats.

b) Mêmes questions avec (y_n) .

Dans ce qui suit, on considère (u_n) vérifiant (F_λ) .

i) On suppose $\lambda < 0$. Montrer que $\sum u_n$ diverge.

ii) On suppose $\lambda > \beta > 1$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

En déduire la nature de $\sum u_n$.

iii) On suppose $0 \leq \lambda < 1$. Montrer que $\sum u_n$ diverge. Que dire dans le cas $\lambda = 1$?

f) Pour $n \geq 1$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{1}{\sqrt{k}}$. Déterminer la nature de $\sum w_n$.

38. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \sin(\pi n! e)$, $V_n = \sin\left(\frac{\pi n!}{e}\right)$, $S_n = n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ et

$$R_n = n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

a) Écrire deux fonctions $Un(n)$ et $Vn(n)$ en Python qui renvoient une liste des n premiers termes des suites (U_n) et (V_n) respectivement. Tracer les courbes correspondantes.

Que remarque-t-on? Que peut-on dire de la nature de $\sum U_n$ et $\sum V_n$?

b) Calculer $S_n + R_n$.

c) i) Montrer que S_n est un entier de même parité que $n + 1$.

En déduire que : $U_n = (-1)^{n+1} \sin(\pi R_n)$.

ii) Étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le signe de $R_n - R_{n-1}$.

iii) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n \leq \frac{1}{n}$.

iv) En déduire la nature de la série de terme général U_n .

d) On pose $T_n = n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.

i) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $V_n = (-1)^n \sin(\pi T_n)$.

ii) Déterminer un équivalent de T_n .

iii) En déduire la nature de la série de terme général V_n .

39. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_0 : x \in [0, 1] \mapsto 1$ et, pour n dans $\mathbb{N}$, $f_{n+1} : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^x 2\sqrt{f_n(t)} dt$. On pose, $a_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$,

$$b_0 = 1 \text{ et, pour } n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \frac{4\sqrt{b_n}}{a_n + 2}.$$

a) Écrire une fonction qui, pour $n \in \mathbb{N}$, renvoie (a_n, b_n) . Conjecturer la convergence et les limites éventuelles des suites (a_n) et (b_n) .

b) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$ et pour tout x dans $[0, 1]$, $f_n(x) = b_n x^{a_n}$.

c) Tracer $f_2, f_3, f_7, \dots$ pour $x \in [0, 1]$. Conjecture sur la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

d) Montrer que (a_n) converge et donner sa limite.

e) Montrer que $(2^{n+1}b_{n+1} - 2^n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. En déduire que (b_n) converge et donner sa limite.

f) En déduire la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

g) La convergence est-elle uniforme ?

40. a) i) Écrire un code python prenant en argument deux fonctions f et g , une liste $\sigma = [t_0, \dots, t_m]$ et qui renvoie $\max \{|f(t_i) - g(t_i)|, i \in \llbracket 0, m \rrbracket\}$.

ii) On admet que, si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ tels que, pour tout i , $|f(t_{i-1}) - f(t_i)| \leq \varepsilon$. Écrire un code python prenant f et ε en argument et renvoyant la liste $\sigma = [t_0, \dots, t_m]$.

b) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que, pour tout n , f_n est continue et croissante sur $[a, b]$. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f .

i) Montrer que f est croissante sur $[a, b]$.

ii) On suppose de plus f continue. Soient $\varepsilon > 0$ et $(t_0, \dots, t_m)$ tels que pour tout i , $|f(t_{i-1}) - f(t_i)| \leq \varepsilon$. Soit $i \in \{1, \dots, m\}$. Démontrer que, pour tout x dans $[t_{i-1}, t_i]$, $f_n(t_{i-1}) - f(t_i) \leq f_n(x) - f(x) \leq f_n(t_i) - f(t_{i-1})$. En déduire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

iii) Si on ne suppose plus f continue, que dire de la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

c) On définit la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies par $P_0 : t \mapsto 0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout t dans $[0, 1]$, $P_{n+1}(t) = \frac{1}{2}(P_n(t)^2 + t)$.

i) Démontrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction à préciser.

ii) Déterminer à l'aide de Python $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in [-1, 1], |Q(x) - |x|| \leq 0,01$.

41. a) i) Montrer que, si l'on pose $z_1 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n + i \frac{z_n}{|z_n|}$ on définit une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

ii) Calculer les 10 premiers termes de la suite.

b) Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ telle que : $\forall t > 0, g(t+1) - g(t) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, $g(1) = 0$ et $g'(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

i) Montrer que $g'(t)$ s'écrit sur $]0, +\infty[$ comme une somme d'une série de fonctions.

ii) En déduire que, pour $t > 0$, $g(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{1+p}} \right) - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{t+p}} \right) \right)$.

c) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n le point d'affixe z_n .

Soit V l'arc paramétré par $(x(t) = \sqrt{t} \cos(g(t)), y(t) = \sqrt{t} \sin(g(t)))$.

i) Tracer simultanément A_n pour n dans $\{1, \dots, 10\}$ et V pour t dans $[1, 10]$.

ii) Faire une conjecture et la démontrer.

d) Trouver un équivalent de $g(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

42. Soit $f : t \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k(k+1)(1-t^k)}$.

a) Donner le domaine de définition D de f .

b) Définir une fonction, avec un coût linéaire, représentant $f_n : t \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k(k+1)(1-t^k)}$.

c) Tracer $t \mapsto f_{100}(t) + f_{100}(1/t)$ pour t appartenant à $D \cap [-2, 2]$. Que pouvez-vous conjecturer?

d) Prouver cette conjecture.

e) Montrer que f est continue sur D .

f) Soit $u \in]-1, 1[$. Écrire $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u^k}{k(k+1)}$ sous la forme de fonctions usuelles.

g) Soit $t \in]-1, 1[$. Trouver une fonction F telle que $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F(t^n)$.

h) Déterminer un équivalent de f en 1^- .

43. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-|x-n|}}{2^n}$ et $F(x) = 2^x S(x)$.

a) Tracer les graphes de S sur $[-6, 6]$ et de F sur $[0, 30]$.

b) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

d) Montrer que S est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} S(x) dx$.

e) i) Trouver une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$; en déduire une relation entre $F(x)$ et $F(x+1)$.

ii) Pour $x \in [0, +\infty[$, exprimer $F(x)$ en fonction de $F(x - \lfloor x \rfloor)$.

44. a) Soit $f : x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^{n^2}$.

i) Donner le domaine de définition D de f .

Montrer que, pour $x \in D$, $f(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$.

ii) Écrire une fonction qui prend en argument $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$, et qui renvoie la somme $\sum_{k=-n}^n x^{k^2}$.

iii) Déterminer la valeur de n pour avoir une approximation de $f(1/2)$ à 10^{-5} près.

iv) Sur un même graphe, tracer une approximation de f et de $g : x \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$. Conjecture ?

v) Déterminer un équivalent de f en 1. Ind. On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

b) On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $r_2(n)$ comme le cardinal de $\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2, a^2 + b^2 = n\}$.

i) Écrire une fonction python prenant en argument un entier n et renvoyant la valeur de $r_2(n)$. On note $h : x \mapsto \sum_{n \geq 0} r_2(n) x^n$.

ii) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définie par h .

iii) Tracer sur un même graphe une approximation de h , et $\sqrt{h}$. Comparer avec le graphe de la fonction f .

c) Démontrer la conjecture de la question précédente.

45. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2, m = 2p + 3q\}$ et on note $\sigma(n)$ son cardinal, avec la convention $\sigma(n) = 0$ si H_n est vide.

a) Montrer l'existence de $\sigma(n)$. Calculer $\sigma(0), \sigma(1), \sigma(2)$. Montrer que $\sigma(n) \geq 1$ pour $n \geq 3$

b) À l'aide de python, tracer $\sigma(n)$ pour $n \in \llbracket 0, 25 \rrbracket$.

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma(n) x^n$

c) Trouver le rayon de convergence de la série entière S .

d) Montrer que, sur un intervalle I à préciser, $S(x) = \frac{1}{1-x^3} \times \frac{1}{1-x^2}$.

e) On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Déterminer a, b, c, d, f tels que, pour tout z dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1, $S(z) = \frac{a}{1-z} + \frac{b}{(1-z)^2} + \frac{c}{1+z} + \frac{d}{1-jz} + \frac{f}{1-j^2z}$.

f) En déduire une expression de $\sigma(n)$ pour tout n .

46. Soit $f : x \in]-1, 1[\mapsto \frac{1}{(1-x^3)(1-x^5)}$.

a) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. Donner un minorant strictement positif de son rayon de convergence. On note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$

b) Écrire une fonction qui calcule c_n

c) Calculer c_n pour $n \in \{0, \dots, 199\}$. Calculer $c_{n+15} - c_n$ pour $n \in \{0, \dots, 184\}$.

d) Montrer que $(1 - X^{15})(1 - X)$ est divisible par $(1 - X^3)(1 - X^5)$. On note Q le quotient. Que vaut $Q(1)$? Quel est le degré de Q ?

e) Montrer que la fonction $x \mapsto (1 - x^{15}) f(x) - \frac{1}{1-x}$ est polynomiale.

f) En déduire une relation entre c_{n+15} et c_n

g) Soient $n \in \mathbb{N}$ et D_n l'ensemble des couples (u, v) tels que $3u + 5v = n$. On note d_n son cardinal. Écrire une fonction qui calcule d_n . En déduire une relation entre c_n et d_n

47. a) i) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que $H_n \sim \ln n$.

ii) Pour $r \in \mathbb{N}$, on pose $S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$. Pour quelles valeurs de r , la somme S_r est-elle finie ?

iii) À l'aide de Python, calculer S_3 et S_4 à 10^{-5} près.

b) i) Pour tous p et q dans $\mathbb{N}$, on pose $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q dt$. Vérifier que l'intégrale $I_{p,q}$ est bien convergente.

ii) Soit $q \geq 1$. Trouver une relation de récurrence entre $I_{p,q}$ et $I_{p,q-1}$. En déduire que $I_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$.

c) i) Donner les développements en séries entières de $t \mapsto -\ln(1-t)$ et $t \mapsto \frac{1}{1-t}$; préciser les rayons de convergence.

ii) Montrer, lorsque cela est défini, $S_r = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt$.

iii) En déduire $S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1-x} dx$.

iv) On définit la fonction ζ de Riemann par $\forall s > 1, \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Exprimer S_2 à l'aide de $\zeta(3)$. En déduire une valeur approchée de S_2 à 10^{-5} près.

48. a) i) Conjecturer, à l'aide de python, la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$. Préciser une valeur approchée.

ii) De même, conjecturer la nature de l'intégrale $I_m = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2m+1}(t)}{t} dt$ pour un entier $m \in \mathbb{N}$. Que peut-on observer lorsque $m \rightarrow +\infty$?

b) i) Montrer que l'intégrale de la question a) i) converge.

ii) Par une intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

c) On considère, pour entier $m \in \mathbb{N}$, $I_m = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2m+1}(t)}{t} dt$.

i) Montrer que I_m converge pour tout m .

ii) Montrer que la suite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive. En déduire qu'elle converge.

iii) Étudier la limite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$.

Probabilités

49. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{c e^{-i}}{j^2 + 3j + 2}$.

a.i) Déterminer la valeur de c .

ii) Donner la loi de X , son espérance et sa variance.

iii) Déterminer la loi de Y . Admet-elle une espérance finie ?

iv) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

b) On pose $Z = 5X + 7Y$.

i) Écrire une fonction qui reçoit un entier $n \in \mathbb{N}$ et retourne la valeur de $\mathbf{P}(Z = n)$.

ii) Écrire une fonction qui retourne $(\mathbf{P}(Z = k))_{0 \leq k \leq 34}$.

c) i) Montrer que $\mathbf{P}(Z = 23) = 0$.

ii) Montrer que $\forall k > 23, \mathbf{P}(Z = k) > 0$.

d) Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(aX + bY = n) > 0$.

50. Un jeton effectue une marche aléatoire sur quatre cases C_i ($1 \leq i \leq 4$) de la façon suivante :

– à l’instant $n = 0$, le jeton est sur la case C_1 ;

– à l’instant n si le jeton est en C_1 , il se déplace à l’instant $n + 1$, de façon équiprobable, sur l’une des quatre cases (il est donc possible qu’il ne bouge pas) ; si le jeton est en C_i avec $i \in \{2, 3, 4\}$, il se déplace à l’instant $n + 1$ en C_{i-1} .

Soit X_k la variable aléatoire donnant le numéro de la case où le jeton se trouve à l’instant k .

On pose $U_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_k = 1) \\ \mathbf{P}(X_k = 2) \\ \mathbf{P}(X_k = 3) \\ \mathbf{P}(X_k = 4) \end{pmatrix}$.

a) i) Écrire une fonction de paramètre n qui renvoie la liste des numéros des cases où le jeton s’est trouvé entre les instants 0 et n .

ii) Écrire une fonction de paramètre k qui renvoie une approximation empirique de U_k pour $k \in \{10, 50, 100\}$. Conjecture ?

b) i) Déterminer une matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$.

ii) Montrer que 1 est valeur propre de A et donner un vecteur propre associé.

On suppose que A possède trois autres valeurs propres distinctes de module strictement plus petit que 1, deux d’entre elles étant conjuguées non réelles.

iii) Montrer que (U_n) converge et déterminer sa limite.

c) On note $Y_k(i)$ la variable aléatoire qui donne le nombre de passages sur la case i entre les instants 0 et k compris. Écrire une fonction donnant les $Y_n(i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, puis une fonction donnant $\mathbf{E}(Y_{100}(i))$. Conjecture.

51. On considère $N \in \mathbb{N}$ pièces de monnaie. Soit $p \in]0, 1[$. On suppose que chaque pièce à une probabilité p de donner pile et $q = 1 - p$ de donner face. On lance simultanément toutes les pièces, et l’on ne conserve que celles ayant donné pile. On réitère ensuite l’opération, avec les pièces restantes.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note N_k la variable aléatoire correspondant au nombre de pièces restantes à l’issue du k -ième lancer. On note aussi G_k la série génératrice de la variable aléatoire N_k . On admet que N_0 est la variable aléatoire constante égale à N . Ainsi, on a $G_0 : t \mapsto t^N$.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire N_1 , son espérance et sa variance.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner l'image de N_k .

b) On souhaite modéliser l'expérience sous PYTHON.

i) Écrire une fonction `jets(N, p, k)` qui prend en argument $N \in \mathbb{N}$ le nombre de pièces initial, p la probabilité d'obtenir face et k le nombre de lancers, et qui simule la variable aléatoire N_k .

ii) Écrire une fonction `moyenne(N, p, k)` qui estime la moyenne du nombre de pièces restantes à l'issue du k -ième lancer pour 10^5 jets.

iii) Tracer la fonction $p \mapsto \text{moyenne}(N, p, k)$ pour quelques valeurs de N et de k . Que peut-on en conjecturer sur la valeur de $\mathbf{E}(N_k)$?

c) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad \mathbf{P}(N_{k+1} = i) = \sum_{j=i}^N \mathbf{P}(N_k = j) \binom{j}{i} p^i q^{j-i}.$$

d) Montrer que $G_{k+1}(t) = G_k(q + pt)$ puis que $G_k(t) = (1 - p^k + p^k t)^N$.

e) Déterminer la loi de N_k , son espérance et sa variance.

f) Soit T la variable aléatoire définie par $T = \inf\{k \in \mathbb{N}^*, N_k = 0\} \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Que représente T ? Proposer un programme `T(N, p)` permettant de simuler une réalisation de T .

52. Un tirage au sort quotidien permet à un collectionneur de gagner une carte. Il y a N cartes en tout, et on pose $p = [p_0, \dots, p_{N-1}]$, où p_i est la probabilité que la carte numéro i soit tirée au sort, quel que soit le jour.

Pour $n \geq 1$, soit X_n la variable aléatoire donnant le numéro de la carte tirée le jour n , et $Y_{i,n}$ celle qui donne le nombre de cartes numéro i obtenues au bout de n jours. On note aussi $Z_{i,n} = \mathbf{1}_{(Y_{i,n} > 0)}$ l'indicatrice de l'événement $(Y_{i,n} > 0)$, on pose $V_n = [Y_{0,n}, \dots, Y_{N-1,n}]$

$$\text{et } W_n = \sum_{i=0}^{N-1} Z_{i,n}.$$

On suppose connue une fonction `tirage(p)` qui renvoie une carte selon les probabilités contenues dans p .

a) Donner un code qui calcule $W(n)$.

b) Donner un code qui renvoie son espérance. Application numérique avec $n = N = 365$ et p uniforme.

c) Donner la loi de $Z_{i,n}$ et calculer $\mathbf{E}(W_n)$.

d) Calculer $\mathbf{V}(W_n)$.

e) Soient $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}) \in \mathbb{N}^N$ et $s = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i$, supposée valoir au moins 1. Calculer $\mathbf{P}(V_s = \alpha)$.

53. On considère la situation suivante. Un amateur de chewing-gum possède deux paquets de chewing-gum, chacun en contenant N . Il choisit aléatoirement un paquet à chaque tirage. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de chewing-gums dans l'autre paquet lorsqu'il se rend compte qu'un paquet est vide.

- a) À l'aide de Python, conjecturer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de $\sum_{j=p}^{2p} \binom{j}{p} \frac{1}{2^j}$.
- b) i) Écrire une fonction Python simulant la situation décrite. Elle prendra en argument N , le nombre de chewing-gums dans un paquet, et renverra le nombre de chewing-gums restants dans le paquet a priori non vide.
- ii) En déduire une fonction calculant une valeur approchée de $\mathbf{E}(X)$, prenant N en argument.
- iii) Tracer $\mathbf{E}(X)$ en fonction de N , pour N entre 1 et 100.
- Au k -ième tirage, on note Z_k , la variable aléatoire qui vaut 0 si l'amateur prend le paquet de la poche de gauche ou 1 s'il prend celui de la poche de droite. On pose $S_n = Z_0 + Z_1 + \dots + Z_n$. On note T la variable aléatoire qui prend la valeur du dernier tirage (lorsque l'amateur se rend compte qu'un paquet est vide).
- c) Donner la loi de S_n .
- d) Donner $T(\Omega)$. Écrire l'événement $(T = t)$ en fonction d'événements de la forme $(S_n = i)$ et $(Z_k = z)$.
- e) En déduire la loi de T . Faire le lien avec la conjecture de la première question.
- f) Déterminer l'espérance de T .
- g) Déterminer la loi et l'espérance de X . Vérifier le résultat de la deuxième question.

54. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On lance n dés équilibrés à 6 faces. Après chaque lancer, on élimine les dés qui ont fait 1. S'il en reste, on continue les lancers. On note T_i le rang du premier lancer pour lequel le dé i a donné 1. On note N_n le nombre total de lancers.

- a) i) Écrire un code permettant de simuler T_1 .
- ii) Écrire un code permettant de simuler N_n .
- iii) Écrire un code permettant d'estimer l'espérance de N_n . Justifier l'approximation.
- iv) Tracer le graphe de l'espérance de N_n pour $n \in \{1, \dots, 20\}$.
- b) Donner la loi de T_i , son espérance et sa variance.
- c) i) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(N_n \leq k)$.
- ii) Déterminer la nature de la série $\sum \mathbf{P}(N_n > k)$.
- d) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{p-1} \mathbf{P}(X > k) = p\mathbf{P}(X > 0) + \sum_{k=1}^p k\mathbf{P}(X = k)$

- e) On suppose que la série $\sum \mathbf{P}(X > k)$ converge et que X admet une espérance finie.

Montrer que $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k)$

- f) Montrer que N_n admet une espérance finie.
- g) Calculer cette espérance et la comparer aux valeurs approchées obtenues par la simulation.

Centrale II - Python – PC

Algèbre

55. On dit que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si les $a_{i,j}$ sont positifs et, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\sum_{k=1}^n a_{i,k} = 1$.

a) Montrer que, si A et B sont stochastiques, alors AB l'est.

b) On suppose que A est stochastique et que $(A^p)_{p \geq 1}$ converge. La limite de cette suite est-elle stochastique ?

c) Si A est stochastique, montrer que 1 est valeur propre de A .

d) Soit λ une valeur propre d'une matrice A stochastique. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.

Ind. Considérer $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ un vecteur propre associé à λ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_k| = \max\{|x_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$.

e) i) Une fonction d'affichage de matrices est fournie.

Les matrices $U = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles stochastiques ?

ii) Écrire une fonction `suite(M)` qui renvoie les 20 premières puissances de M . La fonction `power(M,k)` est déjà importée. Que dire des limites des suites $(U^p)_p$ et $(V^p)_p$?

iii) Conjecturer la diagonalisabilité dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

iv) Démontrer cette conjecture.

56. Une fonction `PolyRand(n)` qui génère un polynôme aléatoire de degré n à coefficients complexes est fournie. Pour $P = z_0 + z_1X + \dots + z_nX^n \in \mathbb{C}[X]$, on pose

$$M(P) = |z_n| \prod_{i=1}^n \max(1, |z_i|), \Delta(P) = |z_n| \prod_{1 \leq i,j \leq n} |z_j - z_i|^2 \text{ et } \delta(P) = \min_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2 \\ i \neq j}} |z_i - z_j|.$$

Pour $C_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on pose $\|C_k\| = \sqrt{C_k^T C_k}$.

a) Montrer que
$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i)$$

b) Coder les fonctions `M(P)`, `delta(P)`, `DELTA(P)` correspondant à celles de l'énoncé.

c) Coder une fonction `comp(P)` qui renvoie `True` ou `False` suivant que l'inégalité suivante est vraie : $\delta(P) \geq \frac{1}{M(P)^{n-1}} \sqrt{\frac{\Delta(P)}{n^{n+2}}}$.

d) Tester l'inégalité pour des polynômes aléatoires de $\mathbb{C}[X]$ de degré allant de 2 à 21. Proposer une conjecture.

e) À l'aide de l'algorithme de Gram-Schmidt, montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes sont $C_1, \dots, C_n$, $|\det(A)| \leq \prod_{k=1}^n \|C_k\|$. On admet que le résultat est encore valable pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

f) On suppose que $\delta(P) = |z_1 - z_2|$ avec $|z_1| > |z_2|$.

Montrer que $V \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_1^k - z_2^k|^2} \sqrt{\prod_{k=2}^n (1 + |z_k|^2 + \dots + |z_k|^{n-1})}$.

Montrer que $\sqrt{\sum_{k=2}^n (1 + |z_k|^2 + \dots + |z_k|^{n-1})} \leq n^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{M(P)}{n|z_1 - z_2|} \right)$.

57. Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Soit $\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto (2X - 1)P' + X(X - 1)P''$.

a) Montrer que $\langle , \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) Pour $P = \text{Polynomial}([1, -6, 6])$ tester les fonctions `ps(P, P)` et `phi(P)`.

Ces fonctions correspondent au produit scalaire et à φ , et sont déjà implémentées.

c) Générer aléatoirement sur l'ordinateur 10000 polynômes de degré au plus 6, calculer $\langle \varphi(P), P \rangle$, afficher la valeur maximale et la valeur minimale obtenue. En déduire une conjecture sur $\langle \varphi(P), P \rangle$. La fonction permettant de créer aléatoirement les polynômes était déjà définie.

d) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, φ induit un endomorphisme autoadjoint φ_d de $\mathbb{R}_d[X]$.

e) Démontrer la conjecture précédente.

f) Déterminer les valeurs propres de φ_d .

Analyse

58. Soient $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ et $u_0, \dots, u_{p-1} \in \mathbb{C}$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\forall n \in$

$\mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_{n+p-1} + u_{n+p-2} + \dots + u_n$. On note $P = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} X^i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$U_n = (u_n \ u_{n+1} \ \dots \ u_{n+p-1})^T$.

a) Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, indépendante de $u_0, \dots, u_{p-1}$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$. En déduire une expression de U_n en fonction A , U_0 et n .

b) Montrer que le polynôme caractéristique χ_A de A est P .

c) On fournit un programme permettant de créer le polynôme P pour différentes valeurs de degré $p \in [2, 8]$ et donnant pour chaque P les racines, le module des racines et un tracé dans le plan complexe des points ayant pour affixe ces racines. Exécutez-le.

d) Quelle conjecture pouvez-vous faire concernant les racines de P ? Y a-t-il toujours une racine de module strictement supérieur aux autres?

e) On pose $T = (X - 1)P$. Montrer en utilisant T que P admet une racine réelle.

59. Soit $F : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$. On note $\sigma = F(1)$.

a) Montrer que σ est correctement définie.

b) Montrer que F est continue sur $[-1, 1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.

c) Montrer que F réalise une bijection de $[-1, 1]$ dans $[-\sigma, \sigma]$.

d) Une fonction python F calculant F sur son domaine de définition est fournie.

i) Donner une valeur approchée de σ à 10^{-2} près.

ii) Tracer F^{-1} sur $[-\sigma, \sigma]$. Conjecture sur la dérivabilité de F^{-1} sur $[-\sigma, \sigma]$?

iii) Tracer les graphes de $x \mapsto 2F(x)$ et $x \mapsto F\left(\frac{2x(1+x^4)}{\sqrt{1-x^4}}\right)$. Que conclure ?

e) Montrer la conjecture obtenue ci-dessus.

f) Montrer que F^{-1} se prolonge en une fonction G de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-\sigma, 3\sigma]$, et que la courbe représentative de G admet un axe de symétrie d'équation $x = \sigma$, puis qu'on peut prolonger G en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

g) Calculer alors, pour tout x , la valeur de $x G'(x)^2$.

60. a) Montrer que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ se prolonge par continuité en 0. On note σ ce prolongement.

b) Donner le développement en série entière de $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$. Quel est son rayon de convergence ?

c) On fixe $\theta \in \mathbb{R}$. On pose, pour $N \in \mathbb{N}$, $F_N = \sum_{n=-N}^N \sigma((n+t)\pi) \cos(n\theta)$. Montrer

que pour tout $t \in [0, 1[$, $F_N(t) = \sigma(t\pi) \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{2(-1)^{n-1}t^2}{n^2 - t^2} \cos(n\theta) \right) + 1 \right)$. En déduire la

convergence de la suite $(F_N(t))_{N \in \mathbb{N}}$. On note $F(t)$ sa limite.

d) i) On note $u_N(\theta) = F_N(1/2)$. écrire une fonction `u(N, theta)`.

ii) À l'aide de `np.arccos()` tracer `arccos(u500(θ))` pour $\theta \in [-3, 3]$. Conjecture sur $F(1/2)$?

iii) Une fonction `I(theta)` est fournie qui calcule la valeur d'une intégrale I_θ . Tracer sur un même graphe $u_N(\theta)$ pour $N \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ et $\frac{I_\theta}{\pi}$ pour $\theta \in [-3, 3]$. Conjecture sur la valeur de I_θ ?

e) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+xe^{i\theta})}$ converge.

f) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+xe^{i\theta})} = e^{-i\theta} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+xe^{-i\theta})}$.

61. Soit, pour $k \in [0, 1]$, $Z_k : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(t)}}$.

a) Montrer que Z_k est bien définie pour $k \in [0, 1[$. Montrer que Z_k est impaire.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} Z_k(x) = +\infty$.

c) Montrer que Z_k réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

d) Pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, montrer que Z_1 est bien définie et impaire.

e) On pose $S_N = \frac{x}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\cos(\frac{kx}{N})}$. Montrer que $(S_N(x))_{N \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

f) Calculer (Python) $S_{1000}(x)$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

g) Tracer $x \mapsto \arctan \left(\exp \left(Z_1 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right)$ pour $x \in [0, \pi/2[$. En déduire une estimation puis déterminer la valeur de $Z_1(x)$.

62. On note $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k : x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{k+1}}$. On note D le domaine de définition de ζ et K l'ensemble des $k \in \mathbb{N}$ tels que φ_k soit intégrable sur $[1, +\infty[$.

a) Déterminer l'ensemble K .

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$. Montrer que $\sum u_n$ converge. On note γ sa somme.

c) Déterminer le domaine de définition D de ζ . Pour $x \in D$, étudier la monotonie de $t \mapsto t^{-x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et montrer que $\zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$.

d) Montrer que $\sum_{k \geq 2} (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k}$ converge.

e) À l'aide d'un programme Python, afficher les valeurs de $\frac{\zeta(k)}{\int_1^{+\infty} \varphi_k(x) dx}$ pour $k \in [2, 10]$.

Conjecture ?

f) Programmer avec Python une fonction $S(n)$ qui prend comme argument $n \geq 2$ et renvoie $\sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k}$. Afficher les valeurs de $S(n)$ pour $n \in [90, 100]$ et celle de $\frac{S(n)}{\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^2(x+1)} dx}$.

Conjecture ?

g) Démontrer les conjectures faites aux questions précédentes.

h) À l'aide de la fonction Python `np.log` qui donne le logarithme népérien, afficher une valeur approchée de γ .

63. Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $k \in \mathbb{N}$.

a) i) Justifier l'existence et déterminer : $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^k \ln(t)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t^k}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{e^t}$.

ii) Soit $\varphi : t \mapsto \ln^k(t) t^{x-1} e^{-t}$. Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\frac{x}{2}} \varphi(t)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{t}{2}} \varphi(t)$.

iii) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge absolument.

b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$. Montrer que, pour $x \in [a, b]$ et $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $|\ln(t)^k t^{x-1} e^{-t}| \leq |\ln(t)^k t^{a-1} e^{-t}| + |\ln(t)^k t^{b-1} e^{-t}|$.

c) Soit $\Gamma_k : x \mapsto \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $\Gamma'_k = \Gamma_{k+1}$.

d) Tracer $x \mapsto \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}$ sur $[0, 5; 10]$. Conjecture ?

e) Tracer $x \mapsto 2^x \frac{\Gamma(\frac{x+1}{2}) \Gamma(\frac{x}{2})}{\Gamma(x)}$. Conjecture ?

f) Prouver les conjectures des questions précédentes.

64. On pose, pour $\alpha \in]0, 1[$, $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$ et $f_\alpha : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} e^{-xt}}{1+t} dt$. On note

aussi $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

a) Montrer que, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, l'intégrale définissant $I(\alpha)$ est convergente.

b) Montrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$.

d) Tracer dans une même fenêtre pour $\alpha \in [0.05, 0.95]$ le graphe des fonctions $\alpha \mapsto \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{I(\alpha)}{\pi}\right)$ et $\alpha \mapsto \Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha - 1)$. Établir une conjecture.

e) Montrer que l'équation (E) : $y' - y = \frac{1}{x^\alpha}$ admet une unique solution telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$.

f) Trouver une équation différentielle satisfaite par f_α .

g) Résoudre l'équation (E).

65. Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

a) Montrer que Γ est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Exprimer $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel γ .

d) Programmer une fonction $G(n, x)$ qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et un réel $x > 0$ et qui renvoie $\frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$.

e) Tracer le nuage de points $\left(n, \frac{G(n, x_0)}{\Gamma(x_0)}\right)_{1 \leq n \leq 500}$ pour $x_0 \in [1, 5]$. Conjecture ?

f) Programmer une fonction $w(n, x)$ qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $x > 0$ et qui renvoie $\frac{e^{-\gamma x}}{x \prod_{k=1}^n e^{-\frac{x}{k}} \left(1 + \frac{x}{k}\right)}$.

g) Tracer sur un même graphique $\Gamma(x_0)$ et $w(n, x_0)$ pour $x_0 = 1$, $x_0 = 3, 2$, et $x_0 = 5$. Conjecture ?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0, n]}(t)$.

Pour $x, y > 0$, on note $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

h) Montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$. Vérifier la conjecture de la question e).

i) Vérifier la conjecture de la question g.

66. Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{x+t} dt$.

a) Montrer que f est bien définie.

- b) Montrer que f est continue.
 c) Montrer que f a pour limite 0 en $+\infty$.
 d) Une fonction calculant f est fournie dans Python. Afficher le graphe de f sur $[0, 1; 10]$. Conjecturer la monotonie et la limite de f en 0. Afficher le graphe sur $[10, 100]$ de $xf(x)$ et de $(x+1)f(x)$. Conjecturer un encadrement de f au voisinage de $+\infty$. Tracer $x \mapsto \frac{f(x)}{\ln x}$ et conjecturer un équivalent en 0.
 e) Démontrer la monotonie et la limite en 0 conjecturées à la question précédente.
 f) Montrer l'équivalent en $+\infty$.

67. Soient $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{1-y^2} \ln \left(\frac{x+y}{1+xy} \right)$ et $F : x \mapsto \int_0^1 f(x, y) dy$.

- a) Déterminer le domaine de définition D de f et montrer que c'est un ouvert.
 b) Soit S_D l'ensemble des $\varphi \in C^1(D, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in D, 2y\varphi(x, y) + (1-x^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - (1-y^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Montrer que $f \in S_D$.

- c) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times]0, 1[, \left| \ln \left(\frac{x+y}{1+xy} \right) \right| \leq |\ln(y)|$. En déduire que F est bien définie.
 d) Tracer la courbe représentative de F entre 0 et 50 et calculer $F(0)$ et $F(10^4)$. Conjecture ? La fonction calculant F est déjà définie.
 e) Exprimer $F\left(\frac{1}{x}\right)$ à l'aide de $F(x)$ et discuter de la conjecture établie ci-dessus.

Probabilités

68. On dispose d'une urne bleue et d'une urne rouge. L'urne bleue contient initialement n boules bleues et l'urne rouge n boules rouges. À chaque étape on tire une boule au hasard dans chaque urne et on échange ces deux boules d'urne.

On note Z_k le nombre de boules rouges dans l'urne rouge au bout de la k -ième étape. On a $Z_0 = n$. On pose $\Delta_k = Z_{k+1} - Z_k$.

- a) Montrer que Z_k correspond aussi au nombre de boules bleues dans l'urne bleue. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z_1 .
 b) Déterminer les valeurs possibles prises par Z_k . Justifier que Z_k est d'espérance finie et que Z_k admet une variance.
 c) On dispose d'une fonction $\text{simul}(n, k)$ qui simule Z_k . Écrire une fonction $\text{esp}(n, k)$ qui donne une valeur approchée de l'espérance de Z_k à l'aide de 1000 tirages.
 d) Pour $n = 10, 15$ et 20 , représenter graphiquement $(\mathbf{E}(Z_k))_{k \in [0, 30]}$. En déduire une conjecture sur la limite de $(\mathbf{E}(Z_k))$.
 e) Montrer que $\mathbf{P}(\Delta_k = -1) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{i}{n} \right)^2 \mathbf{P}(Z_k = i)$. Montrer une formule similaire pour $\mathbf{P}(\Delta_k = 1)$.
 f) En déduire une relation de récurrence sur les $\mathbf{E}(Z_k)$.
 g) Déterminer $\mathbf{E}(Z_k)$ en fonction des paramètres n et k et prouver la conjecture.

h) Déterminer la limite de $(\mathbf{V}(Z_k))$.

69. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_i .

On pose $S = \sum_{i=1}^N X_i$ et $M = \max(X_1, \dots, X_N)$ avec $M = 0$ si $N = 0$.

a) Montrer que M admet une espérance.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathbf{P}(N = n) \neq 0$. Donner la loi de S sachant $(N = n)$.

c) On suppose dans cette question que $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

i) On fournit une fonction `simul(p, a, b)` qui renvoie un diagramme en bâtons représentant la loi $\mathcal{P}(b)$ et de S lorsque $N \sim \mathcal{P}(a)$. Essayer avec divers valeurs. Que peut on conjecturer sur la loi de S ?

ii) Montrer cette conjecture et en déduire $\mathbf{E}(S)$.

d) Une urne contient une boule blanche et une noire. On effectue des tirages successifs en respectant les règles suivantes :

- si on tire une boule blanche, on la remet et on y ajoute une boule blanche,
- si on tire une boule noire, on s'arrête.

Soit N le nombre de boules blanches à la fin de l'expérience. On fournit une fonction `N(s)` qui renvoie un tableau de s simulations de N .

i) On note G la fonction génératrice de N . Écrire une fonction qui renvoie une approximation de $G(x)$ pour $x \in [-1, 1]$.

ii) Représenter graphiquement G sur $[-1, 1]$. Conjecture ?

iii) Représenter $x \mapsto \frac{G(x) - x}{x - 1}$ sur $[-1/2, 1/2]$.

70. Une bactérie peut se dédoubler avec probabilité $\frac{2}{3}$ ou disparaître avec probabilité $\frac{1}{3}$. On note X_n le nombre de bactéries à la n -ième étape, on suppose que $X_0 = 1$.

a) Déterminer la loi et l'espérance de X_1 .

b) Déterminer les valeurs que peut prendre X_n .

c) Une fonction `simul(n)` est donnée et renvoie une liste contenant une simulation de n étapes successives de l'expérience.

i) Écrire une fonction `esp(n)` qui renvoie une liste avec une moyenne des simulations des X_k pour 10000 simulations. On note `esp(n)` = $[m_0, \dots, m_{n-1}]$.

Représenter $\left(3k \frac{m_{k+1}}{m_k} \right)_{k \in \llbracket 0, 20 \rrbracket}$. Conjecture ?

ii) Écrire une fonction `proba(n)` qui renvoie $[p_0, \dots, p_{n-1}]$ où p_k est une estimation après $N = 1000$ simulations de la probabilité $\mathbf{P}(X_k = 0)$. Tracer $(p_k)_{k \in \llbracket 0, 20 \rrbracket}$. Conjecture ?

d) On note G_n la série génératrice de X_n . On admet que $G_{n+1} = G_1 \circ G_n = G_n \circ G_1$.

i) Donner le rayon de convergence de G_n .

ii) Donner G_1 .

iii) Démontrer votre première conjecture.

e) i) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbf{P}(X_n = 0)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}u_n^2$.

ii) Démontrer la deuxième conjecture.

71. Soit (ε_k) une suite de variables aléatoires indépendante identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $X_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} \varepsilon_k$.

a) Montrer que X_n admet une espérance et une variance que l'on calculera.

b) Soit, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln^2 k}{k^2}$. Montrer que (S_n) converge vers un réel S .

c) Établir que, pour tout $a > 0$, $\mathbf{P}(X_n \geq a) \leq \frac{S_n}{a^2} \leq \frac{S}{a^2}$.

d) Une fonction fournie `sim_X` permet de simuler X_n .

Écrire une fonction qui estime $\mathbf{P}(M_n \geq a)$ avec 10000 essais.

Conjecturer le signe de $\mathbf{P}(M_n \geq a) - \frac{S_n^2}{a}$ avec $n \in \{20, 30, 50\}$ et $a \in \{2, 3, 4\}$.

e) Montrer que $\mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sqrt{\ln n}} \geq a\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

f) Soient $A_k = (X_k \geq a) \cap \bigcap_{\ell < k} (X_\ell < a)$ et $A_1 = (X_1 \geq a)$. Écrire $\mathbf{P}(M_n \geq a)$ avec les A_k .

g) Montrer que $\mathbf{E}(X_k^2 \mathbf{1}_{A_k}) \geq a^2 \mathbf{P}(A_k)$.

h) Montrer la conjecture obtenue précédemment.