QUESTIONS SANS RÉPONSE DE LA RUBRIQUE QR

Mise à jour du 1/4/2026

Les réponses peuvent être envoyées, scannées ou de préférence au format latex et/ou pdf, à l'adresse électronique : *QR@rms-math.com*.

1. Algèbre linéaire et bilinéaire

Q655 (119-4) *auteur : Saab Abou-Jaoudé*

À la suite de R626. Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{C}(f)$ le commutant de $f \in \mathcal{L}(E)$.
Lorsque f et g ne sont pas des homothéties, quelle est la dimension maximum de $\mathcal{C}(f)+\mathcal{C}(g)$ et quels sont les couples (f, g) qui réalisent l'égalité ?

Q706 (121-2) *auteur : Jean-Baptiste Hiriart-Urruty*

On note $S_n([a, b])$ l'ensemble des matrices symétriques réelles dont tous les coefficients sont dans $[a, b]$. Pour toute matrice symétrique réelle A, on note $\lambda_k(A)$ la k^e valeur propre de A dans l'ordre décroissant.
Étudier en fonction de n, a, b les bornes de l'ensemble des $\lambda_k(A)$ où A parcourt $S_n([a, b])$.

Q730 (95-3 et 121-4) *auteur : Jean-Marie Monier*

Soit M une matrice complexe carrée d'ordre n et de rang r. Soit des réels $t_1, t_2, \ldots, t_r$ strictement positifs. Existe-t-il des matrices U et V, unitaires complexes d'ordre n telles que $UMV = \begin{pmatrix} T & B \\ O & O' \end{pmatrix}$, où T est une matrice triangulaire supérieure d'ordre r et d'éléments diagonaux $t_1, t_2, \ldots, t_r$, B est une matrice de format $r \times n - r$, les matrices O et O' sont nulles ?
Cette question faisait suite à R33 (95-3), où l'on répond « oui » dans le cas où $|\det M| = 1$ et tous les t_i valent 1.

Q857 (104-4 et 125-2) *auteur : Michel Wirth*

L'exercice d'oral corrigé 73 (102-10) faisait étudier, pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la borne inférieure des $\|A - M\|$, où M parcourt l'ensemble des matrices M telles que $\det M = 0$, $\|.\|$ étant la norme subordonnée à la norme hermitienne.
Étudier dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) la borne inférieure des $\|A - M\|$, où M parcourt l'ensemble des matrices M telles que $\det M = 1$, $\|.\|$ étant la norme subordonnée à la norme hermitienne (resp. euclidienne).

Q884 (126-1) *auteur : RMS*

C'est la question 4 de l'exercice 9 de la compétition ITYM pour « lycéens ».
Trouver les couples de matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ tels qu'il existe un vecteur X vérifiant que toute sous-famille de n vecteurs de $(A^k B^\ell X)_{k<ord(A),\ \ell<ord(B)}$ est libre ($ord(M)$ est le plus petit $k > 0$ tel que $M^k = I$, infini s'il n'en existe aucun).

Q902 (126-3) *auteur : RMS*

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on note $\|.\|$ la norme subordonnée à la norme hermitienne usuelle sur $\mathbb{C}^n$. On note, pour tout entier k strictement positif, U_k l'ensemble des polynômes unitaires de degré k à coefficients complexes. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Expliciter le ou les éléments P qui minimisent sur U_k : $Q \mapsto \|Q(A)\|$.
Dans l'exercice d'oral 53 de RMS 125 on étudiait l'existence et l'unicité de P.

Q942 (127-4) *auteurs : Richard Antetomaso et Alain Tissier*

Cette question fait suite à R499 et à l'article « Quel est le maximum de la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ dont tout élément non nul est inversible ? », (voir RMS 127-4) .
On note $\mathcal{G}(n)$ l'ensemble constitué de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et de la matrice nulle de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.
a) En conséquence du théorème d'Adams et de l'article précité de ce numéro, $\mathcal{M}(6, \mathbb{R})$ ne contient pas de sous-espace vectoriel de dimension trois inclus dans $\mathcal{G}(6)$. Prouver élémentairement ce résultat.
b) Deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ sont dits équivalents s'il existe P et Q dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tels que $M \mapsto PMQ$ envoie F sur G.
On note H l'algèbre des quaternions, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(4, \mathbb{R})$ engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Existe-t-il dans $\mathcal{M}(4, \mathbb{R})$ un sous-espace vectoriel de dimension quatre inclus dans $\mathcal{G}(4)$ et non équivalent à H ?

Q949 (128-2) *auteur : Marcin Pulkowski*

Suite de l'exercice d'oral corrigé 516 (124 4).
Soit E un espace vectoriel réel normé de dimension finie au moins égale à 2. Dans l'exercice 516, on montre que pour tout élément non nul a de E et tout élément b de E, l'infimum de $|||f|||$, où f est un endomorphisme de E tel que $f(a) = b$, est $\|b\|/\|a\|$. Étudier l'infimum de $|||f|||$, où f est un endomorphisme de E tel que $f(a_1) = b_1$ et $f(a_2) = b_2$, (a_1, a_2) étant un système libre de E et (b_1, b_2) un élément de E^2.

Q970 (129-2) *auteur : Alain Tissier*

On note $\mathbb{K}$ un corps et n un entier au moins égal à deux. Pour toute matrice nilpotente N de taille n, on note $D(N)$ la suite donnée par $d_i(N) = \dim \operatorname{Ker} N^i - \dim \operatorname{Ker} N^{i-1}$ pour tout entier $i > 0$. Les suites $D(N)$ sont les suites d'entiers naturels qui sont décroissantes et de somme n. Le dernier i tel que $d_i > 0$ est l'indice de nilpotence de N.
On montre que N est le carré d'une matrice si et seulement $D(N)$ ne comporte pas deux termes consécutifs *impairs* égaux. Soit N une matrice nilpotente de taille n, et $D(N) = (a_1, a_2, \dots)$. Dénombrer les $D(H) = (b_1, b_2, \dots)$ où H est nilpotente et telle que $H^2 = N$.

Q999 (130-3) *auteur : Franck Taieb*

Caractériser les sous-espaces vectoriels F de $\mathcal{M}_n(K)$ vérifiant la propriété suivante : les seules matrices A inversibles telles que $(M \in F) \Longrightarrow (AM \in F)$ sont les matrices scalaires non nulles.

Q1013 (131-2) *auteur : Richard Antetomaso*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dira que M vérifie (P) si l'ensemble des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contenant M est fini. Dans l'exercice d'oral 15 de l'année 2014, corrigé dans RMS 125-4, on prouve que si M possède n valeurs propres distinctes alors M vérifie (P).
a) Montrer que, pour $n = 2$, les matrices vérifiant (P) sont les matrices M cycliques.
b) Ce résultat est-il vrai pour n quelconque ?

Q1026 (131-4) *auteur : Jean-Denis Eiden*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; pour tout endomorphisme u de E on désigne par $\mathfrak{z}(u)$ l'algèbre des endomorphismes commutant avec u.
a) Si $u = [v, w]$, où v et w sont dans $\mathfrak{z}(u)$, montrer que u est nilpotent.
b) Réciproquement, si E est de dimension 3 et si u est nilpotent de rang 1, montrer que u est de la forme indiquée dans **a)**.
c) Montrer que si E est de dimension pq, où $p \geqslant 2$, et si u, nilpotent, admet une réduite de Jordan formée de q blocs de format (p, p), alors u n'est pas de la forme indiquée dans **a)**.
d) Existe-t-il des endomorphismes nilpotents u ayant au moins deux blocs de Jordan de tailles inégales et qui ne sont pas de la forme indiquée dans **a)** ?

Q1034 (132-2) *auteur : Flavien Mabilat*

Dans cette question toutes les matrices intervenant sont carrées complexes de taille n.
a) Quelles sont les matrices réelles B telles que pour toute matrice A symétrique réelle définie positive, AB est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
b) Quelles sont les matrices complexes B telles que pour toute matrice A symétrique réelle définie positive, AB est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
c) Quelles sont les matrices complexes B telles que pour toute matrice A hermitienne définie positive, AB est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Dans l'exercice d'oral 58 (énoncé dans RMS 131-2 et corrigé dans RMS 131-3) on demande de montrer que si B est antisymétrique réelle, elle vérifie la propriété de **b)**.

Q1050 (133-1) *auteur : Clément de Seguins Pazzis*

Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de caractéristique différente de 2. La question Q745, résolue dans RMS 132-1 demande la caractérisation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices dont la classe de similitude contient une matrice symétrique.

On demande ici la caractérisation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices dont la classe de similitude contient une matrice antisymétrique.
Traiter également pour cette question le cas de corps infinis : $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, etc.

Q1051 (133-1) *auteur : Alain Tissier*

Quel est le maximum a_n de la dimension d'une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendrée par deux projecteurs ? $\mathbb{K}$ est un corps quelconque et n est un entier au moins égal à deux. Dans la réponse R1020 parue dans la RMS 133-1 il est prouvé que $a_n = n^2$ si et seulement si $n = 2$ et $\mathbb{K}$ possède au moins trois éléments.

Q1054 (133-2) *auteur : Richard Antetomaso*

À la suite de la réponse R697 par Clément de Seguins Pazzis, voici quelques questions portant sur la généralisation à un espace préhilbertien E de dimension infinie quelconque. On note E' l'espace des formes linéaires continues sur E muni de la norme d'opérateur $|||.|||$. On pourra porter une attention particulière au cas des espaces séparables.
a) Montrer que la norme $|||.|||$ sur E' est euclidienne.
b) Le groupe $O(E)$ agit-il transitivement sur la sphère unité ? sur les hyperplans denses ? sur les hyperplans fermés d'orthogonal nul ?
c) La condition d'isométrie de deux sous-espaces G et G' de codimension finie portant sur les trois égalités $\operatorname{codim}(G) = \operatorname{codim}(G')$, $\operatorname{codim}(\overline{G}) = \operatorname{codim}(\overline{G'})$ et $\operatorname{codim}(G^{\perp}) = \operatorname{codim}(G'^{\perp})$ trouvée par l'auteur de R697 dans le cas de la dimension dénombrable, qui est toujours nécessaire, est-elle encore suffisante ?

Q1061 (133-3) *auteur : Bernard Randé*

Dans l'exercice n° 164 de la RMS 133-2, il est demandé de démontrer que, si $n \geqslant 1$ et si A et B sont deux matrices carrées complexes telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}A^kB^{n-k} = 0$, alors $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B$.
Qu'en est-il lorsque A et B sont deux opérateurs d'un espace de Hilbert ou plus généralement d'un espace de Banach ?

Q1069 (134-1) *auteur : Richard Antetomaso*

On considère l'espace S des suites réelles, le sous-espace B des suites bornées et on s'intéresse aux opérateurs de la forme :

$$\Phi : U \in S \mapsto V \in S \text{ où } \forall n, v_n = a_1 u_{f_1(n)} + \ldots + a_d u_{f_d(n)}$$

les a_i étant des réels strictement positifs de somme 1 et les $f_i : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ des applications telles que $\forall i, \forall n, f_i(n) \geqslant n.$

a) On suppose que les f_i commutent deux à deux. Montrer que $U \in B$ est invariante par Φ si et seulement si pour tout i et tout n on a $u_n = u_{f_i(n)}$.
b) On suppose $\forall n, f_1(n) = n + 1$ et que pour tout i $f_i - Id$ est bornée sur $\mathbb{N}$. Montrer que $U \in B$ est invariante par Φ si et seulement si elle est constante.

On prend dorénavant $\Phi(U) = V$ où $\forall n, v_n = \dfrac{1}{2}\left(u_{n+1} + u_{2n}\right)$. On note I l'espace des invariants de Φ.
c) Montrer que $\Theta : U \in I \mapsto (\Phi(U)_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \in S$ est un isomorphisme et que l'image de $I \cap B$ par Θ est de codimension infinie dans B.
d) Peut-on caractériser les invariants bornés de Φ ?

Q1072 (134-1) *auteur : Arnaud Basson*

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A = UH$ sa décomposition polaire (U unitaire, H hermitienne positive). Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|\operatorname{tr}(A^k)| \leqslant \operatorname{tr}(H^k)$.

b) Plus généralement, si $U_1, \ldots, U_k$ sont des matrices unitaires et H une matrice hermitienne positive, est-il vrai que

$$|\operatorname{tr}(U_1 H U_2 H \cdots U_k H)| \leqslant \operatorname{tr}(H^k)\,?$$

L'inégalité de la première question est prouvée dans Horn, Johnson, Topics in Matrix Analysis, comme corollaire d'une longue succession de théorèmes (bien plus généraux). Y a-t-il une preuve directe raisonnablement courte ?

Q1075 (134-2) *auteur : Emmanuelle Tosel*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps de cardinal q. On dit qu'une famille de vecteurs de E est en position générale si et seulement si toute sous-famille de cardinal n en est une base. Déterminer le cardinal maximal d'une famille en position générale.

2. Analyse réelle et fonctionnelle

Q587 (117-3) *auteur : Jean-Claude Sifre*

Soit I un intervalle réel, f une application de I dans $\mathbb{R}$. Soit n un entier naturel, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des points de I rangés dans l'ordre croissant. On note $P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f selon $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, et on écrit

$$P(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{q=0}^{n} c_q(x_0, x_1, \ldots, x_n) X^q.$$

Soit $x \in I$; on dit que f admet un *développement interpolé de Taylor* à l'ordre n (en abrégé DIT(n)) lorsque pour tout $q \in [\![0, n]\!]$, la fonction c_q a une limite finie quand $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ tend vers $(x, x, \ldots, x)$. On note alors $f^{[q]}(x)$ le produit par $q!$ de cette limite.
a) Montrer que pour que f admette un DIT(n) en x, il suffit que c_n ait une limite finie quand $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ tend vers $(x, x, \ldots, x)$.
b) Montrer que si f admet un DIT(n) en x, alors f admet un développement limité à l'ordre n en x.
c) Soit un entier naturel $p < n$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^p$. Montrer que f admet un DIT(n) en x si et seulement si $f^{(p)}$ admet un DIT($n-p$) en x.
d) Soit toujours $p < n$. On suppose que f admet un DIT(p) en tout point x de I, ce qui définit $f^{[p]} : I \to \mathbb{R}$. Est-il vrai que f admet un DIT(n) en x si et seulement si $f^{[p]}$ admet un DIT($n-p$) en x ?

Q756 (122-3) *auteur : RMS*

À la suite de l'exercice corrigé 126 (121-4).
Soit un réel β et un réel λ tel que $|\lambda| > 1$. On note $F(\beta, \lambda)$ l'ensemble des fonctions g dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = g(\lambda t) - \beta g(t).$$

Il existe une fonction polynomiale non nulle de degré p appartenant à $F(\lambda^p, \lambda)$ pour tout entier naturel p.
Étudier, pour tout (β, λ) l'existence de fonctions non polynomiales appartenant à $F(\beta, \lambda)$.

Q758 (111-7 et 122-3) *auteur : Denis Lepelletier*

Soit v une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. Pour f dans E, on pose :

$$Tf(x) = \int_0^1 f(xv(t))\mathrm{d}t.$$

Trouver des conditions nécessaires, suffisantes, pour que T soit injective.

Q759(109-9 et 122-3) *auteur : Jean-Claude Sifre*

On note E l'espace des fonctions réelles $\mathcal{C}^\infty$ définies sur $[-1,1]$. On munit E de la norme uniforme N_∞.
Soient (f_n) une suite de E et g un élément de E. On note $(f_n) \rightrightarrows g$ la propriété :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} N_\infty(f_n^{(k)} - g^{(k)}) = 0.$$

Soit $\alpha \in E$ définie sur $]-1,1[$ par $\alpha(x) = \exp \dfrac{-x^2}{1-x^2}$ et par $\alpha(1) = \alpha(-1) = 0$.
Étudier les propriétés $(f_n) \rightrightarrows \alpha$ pour les deux suites :
a) $f_n(x) = \exp(-x^2 - x^4 - \cdots - x^{2n})$,
b) $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}}{n}\right)^n$.

Q830 (103-6 et 124-3) *auteur : Michel Wirth*

a) Déterminer les solutions maximales de $yy'' = 1$.
b) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Que dire des solutions de $yy'' = f$?

Q850 (125-2) *auteur : Rafik Imekraz*

Il est connu que tout nombre algébrique irrationnel $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifie une inégalité diophantienne du type

$$\exists d \geqslant 2,\ \exists C > 0,\ \forall (p;q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N},\ \left| x - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{C}{q^d}.$$

Un exemple typique de nombre qui ne vérifie pas cette inégalité est le nombre de Liouville $x = \sum_{n\geqslant 1} 10^{-n!}$. Pour ce réel x, on demande de trouver des exemples explicites de fonctions décroissantes $\psi : N^* \to]0;1[$ telles que

$$\forall (p;q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N},\ \left| x - \frac{p}{q} \right| \geqslant \psi(q).$$

Q885 (126-1) *auteur : Daniel Saada*

On note A_n l'intervalle $[n, n + n^{-3}[$ pour tout entier $n > 0$.
On note f la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vaut n sur A_n pour tout entier $n > 0$ et 0 ailleurs.
On pose $J(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)f(t/a)\mathrm{d}t$ pour tout réel $a > 0$. On note D l'ensemble des $a > 0$ tels que $J(a) < +\infty$. On montre que $\displaystyle\int_0^a u^{-2}J(u)\mathrm{d}u < +\infty$ pour tout $a > 0$; donc presque tout réel $a > 0$ est dans D. Cependant on montrera (voir a)) que D ne contient aucun nombre rationnel.
a) Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)f(t/a)\mathrm{d}t = +\infty$ (ce qui entraîne que $J(a) = +\infty$).
b) Donner des exemples d'irrationnels a tels que $J(a) < +\infty$.

c) Existe-il un irrationnel a tel que $J(a) = +\infty$?

Q887 (126-2) *auteur : Alain Rémondière*

On note E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme uniforme. On note M l'opérateur qui à f associe g où $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t$.
a) Quels sont les valeurs propres et le spectre de M ?
b) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par M de dimension finie. L'endomorphisme induit par M sur F est-il toujours cyclique ?

Désormais on considère F, un sous-espace vectoriel fermé de E stable par M de dimension infinie. On note M_F l'endomorphisme induit. Pour tout a de $]0,1[$ on note F_a le sous-espace de E des fonctions dont la restriction à $[0,a]$ est nulle.
c) Montrer que F_a est stable par M, de dimension infinie et fermé, et que $\mathrm{Sp}\left(M_{F_a}\right) = \{0\}$.
d) Se peut-il que 0 ne soit pas dans le spectre de M_F ?
e) Y-a-t'il d'autres sous-espaces F que les F_a pour lesquels le spectre de M_F est réduit à $\{0\}$?

Q899 (126-3) *auteur : Rafik Imekraz*

Pour tout intervalle $[a,b] \subset [0,1]$ et tout réel $p > 2$ on note $p_{a,b}$ le projecteur de $L^p\big([0,1]\big)$ défini par

$$\forall x \in [0,1] \quad \forall f \in L^p\big([0,1]\big) \quad p_{a,b}(f)(x) = \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\right)\mathbf{1}_{[a,b]}(x).$$

Existe-t-il un réel $p > 2$ et une constante $C(p) \geqslant 1$ qui vérifient la propriété suivante : pour tout entier $N \in \mathbb{N}^\star$, tous intervalles $[a_1,b_1],\ldots,[a_N,b_N]$ de $[0,1]$ et tout $(f_1,\ldots,f_N) \in L^p\big([0,1]\big)^N$, on a

$$\left\|\sqrt{|p_{a_1,b_1}(f_1)|^2+\cdots+|p_{a_N,b_N}(f_N)|^2}\right\|_{L^p(0,1)} \leqslant C(p)||\sqrt{|f_1|^2+\cdots+|f_N|^2}||_{L^p(0,1)}?$$

Commentaire. En termes d'analyse fonctionnelle, l'inégalité s'appelle la « $\mathcal{R}$-bornitude » de la famille de projecteurs $p_{a,b} : L^p\big([0,1]\big) \to L^p\big([0,1]\big)$.

Q909 (126-4) *auteur : Rafik Imekraz*

Soit $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et I l'intervalle $]0,+\infty[$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur ϕ pour qu'il existe une fonction $f \in L^1(I) \cap L^\infty(I)$ telle que

$$\ln ||f||_{L^p(0,+\infty)} = \phi(1/p) \text{ pour tout } p \geqslant 1.$$

Q912 (126-4) *auteur : RMS*

D'après l'exercice 112 de la RMS 124-2. On note E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, concaves sur $[-1,1]$ et s'annulant en -1 et en 1 et non identiquement nulles.
a) Montrer l'existence de $c>0$ tel que pour toute f de E, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t \geqslant c\int_{-1}^{1} |f'(t)|\mathrm{d}t$.
Quelle est la meilleure constante c possible ?
b) Montrer l'existence de $c'>0$ tel que $\forall f\in E$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t \geqslant c'\int_{-1}^{1} \frac{f'(t)^2}{\sqrt{1+f'(t)^2}}\mathrm{d}t$.
Quelle est la meilleure constante c' possible ?
c) Pour toute f de E et tout réel λ tel que $0<\lambda\leqslant c'$, on pose

$$J_\lambda(f)=\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t-\lambda\int_{-1}^{1}\sqrt{1+f'(t)^2}\mathrm{d}t.$$

Calculer l'infimum de $f\longmapsto J_\lambda(f)$.

Q933 (127-3) *auteur : Alain Tissier*

On note T la transformation sur les suites réelles donnée par $(\mathrm{T}u)_n=u_{n+1}-u_n-{u_n}^2$. Dans l'exercice d'oral 273 corrigé dans le présent numéro on montre que si $((\mathrm{T}u)_n)$ tend vers 0 alors (u_n) tend ou bien vers 0 ou bien vers $+\infty$.

Peut-on caractériser les suites réelles (v_n) qui sont l'image par T d'une suite (u_n) de limite nulle ?

Q941 (127-4) *auteur : Rafik Imekraz*

On note S l'espace de Schwarz sur $\mathbb{R}$, c'est l'espace vectoriel des fonctions $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^n f^{(m)}(x)|<+\infty$ pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$. Pour tout entier $p\geqslant 1$, on note

$$J_p:=\inf\left\{\int_{\mathbb{R}} f'(x)^2+x^{2p}f(x)^2\mathrm{d}x,\quad f\in S\quad\text{et}\quad\int_{\mathbb{R}} f(x)^2\mathrm{d}x=1\right\}.$$

On peut montrer que $J_1=1$ (et atteint pour $f(x)=\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-x^2/2}$ la première « fonction propre de l'oscillateur harmonique $-d_x^2+x^2$ »).
a) Est-il vrai que $(J_p)_{p\geqslant 1}$ est monotone à partir d'un certain rang ?
b) Est-il vrai que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} J_p=\frac{\pi^2}{4}$?

Q944 (128-1) *auteur : Arnaud Basson*

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles définies sur $[0,1]$. Soif $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On note $P_n(f)$ le projeté orthogonal de

f sur $\mathcal{P}_n$ pour le produit scalaire usuel de $L^2(0,1)$. Par analogie avec la théorie des séries de Fourier, trouver une condition aussi faible que possible sur la régularité de f pour que la suite $(P_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Q955 (128-3) *auteur : Bernard Randé*

Suite à l'exercice d'oral 93 corrigé dans RMS 128-3.
Pour tout entier naturel q et tout réel $x \in]0,\pi[$, on considère l'expression :

$$S(q,x) = (q+1)\left|\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}\right| \sin\frac{x}{2}.$$

Déterminer sa borne supérieure.

Q986 (129-4) *auteur : Richard Antetomaso*

L'exercice 291 de la RMS 119-2 demandait s'il existe une partie A de $\mathbb{N}$ telle que $f_A : x \mapsto \sum_{n\in A} \frac{x^n}{n!} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}$. Une réponse négative et assez simple a été donnée dans la RMS 119-4.
Cette réponse montre que l'exposant 2 n'est pas exceptionnel mais laisse la place à la question suivante. Existe-t-il $A \subset \mathbb{N}$, $\alpha \geqslant 1/2$, et $C > 0$ tels que

$$f_A(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} C\frac{e^x}{x^\alpha}?$$

Q1000 (130-3) *auteur : Éric Pité*

À la suite de R827, publiée dans RMS 130-3.
Pour tous entiers p et q tels que $0 < p < q$, on pose $M(p,q) = \max_{x\in\mathbb{R}} |\sin(px) - \sin(qx)|$.
a) Montrer que les suites $\big(M(1,4n)\big)_{n\geqslant 1}$, $\big(M(1,4n+1)\big)_{n\geqslant 0}$, $\big(M(1,4n+2)\big)_{n\geqslant 0}$ sont strictement croissantes.
b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $M(1,4n+1) < M(1,4n) < M(1,4n+2)$.

Q1007 (130-4) *auteur : Marcin Pulkowski*

On considère l'équation fonctionnelle : (E) $f'(t) = f(t-t^2)$.
On sait que l'ensemble des fonctions définies sur $[0,1]$, dérivables et solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 1. On note f l'unique solution sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 1$.
a) Existe-t-il une solution g de E définie sur un intervalle incluant strictement $[0,1]$ et prolongeant f ?
b) f est-elle développable en série entière en 0 ?

Q1009 (131-1) *auteur : Richard Antetomaso*

a) On considère les applications $f : I \mapsto \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(0) = 1$ et qui sont solution de l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = f(x^2)$$

où I est un intervalle contenant 0 stable par la fonction $x \mapsto x^2$. Montrer que si 1 est l'extrémité droite de I alors le problème ci-dessus a une unique solution. Étudier le cas $I = \mathbb{R}_+$.
b) Plus généralement étudier le même problème pour l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = f\big(P(x)\big),$$

P étant un polynôme réel admettant 0 comme point fixe attractif ($P(0) = 0, |P'(0)| < 1$).

Q1014 (131-2) *auteur : Alain Tissier*

Dans la réponse R890 (RMS 128-1) on prouve que la fonction êta de Dirichlet, donnée par $\eta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-x}$ est croissante sur $]0, +\infty[$. Son prolongement analytique, noté encore η, peut être donné sur $]-1, +\infty[$ en utilisant la formule

$$\eta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left((2n-1)^{-x} - 2(2n)^{-x} + (2n+1)^{-x}\right).$$

Mais on obtient aussi une forme intégrale donnant ce prolongement à $]-1, +\infty[$:

$$\Gamma(x)\eta(x) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t.$$

Grâce à la proposition 1 p.116 de R890 (rectifiée dans RMS 131-2) cette forme intégrale permet de prouver que η croît sur $]-1, +\infty[$.
Voici la nouvelle question : η est-elle concave sur $]-1, +\infty[$?

Q1023 (131-4) *auteur : Omar Sonebi*

Il est bien connu que la série de terme général $\sin(\pi e n!)$ converge.
Étudier l'ensemble des x réels tels que la série de terme général $\sin(xn!)$ converge.

Q1030 (132-1) *auteur : Alain Tissier*

On note E l'espace vectoriel des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, E_0 le sous-espace vectoriel de E constitué des suites de limite nulle et E_1 le sous-espace de E constitué des suites sommables. On pose, pour toute u de E, $Tu = v$ où $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. On considère deux propriétés :

(A) pour tout $p \in \mathbb{N}$ la suite $T^p u$ est dans E_0 ;

(B) pour tout $p \in \mathbb{N}$ la suite de terme général $n^p u_n$ est sommable et de somme nulle.

Dans R817 (RMS 131-4), Alain Rémondière prouve que (B) implique (A). La réciproque est-elle vraie ?

Q1032 (132-1) *auteur : Franck Taieb*

On dit qu'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, présente un *mode* en $M \leqslant n$ si on a

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_M \geqslant a_{M+1} \geqslant \cdots \geqslant a_n.$$

Soit P un polynôme à coefficients strictement positifs ; on s'intéresse à ses puissances. Si P représente la fonction génératrice d'une variable aléatoire X, alors P^N est la fonction génératrice de la somme de N copies indépendantes de X.
a) Existe-t'il un rang N pour lequel P^N présente un mode ?
b) Est-ce que P^N présente toujours un mode pour N assez grand ?
c) Ce mode apparaît-il en un indice M_N équivalent à $\dfrac{P'(1)}{P(1)}N$?

Q1067 (133-4) *auteur : Alain Tissier*

À la suite de l'exercice d'oral 72 (RMS 122 2). On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$x_{n+2} = \frac{a + x_{n+1}}{x_n},$$

où $a > 0$, avec $x_0 > 0$ et $x_1 > 0$.

Étudier selon le paramètre a et les valeurs initiales x_0 et x_1 diverses propriétés de la suite (x_n). Est-elle bornée ? est-elle périodique ? est-elle convergente ?
L'exercice d'oral était posé avec $a = 1$.

Q1073 (134-2) *auteur : Rafik Imekraz*

Soit I un ensemble, on dira qu'un espace de Banach B est un espace de fonctions sur I si les évaluations $f \in B \mapsto f(t)$ sont continues pour tout $t \in I$. On dira de plus que B a la propriété de *régularité sous* $\int$ si pour tout espace mesuré Ω et pour toute fonction $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, la fonction $F : t \mapsto \displaystyle\int_\Omega f(t,x)\mathrm{d}\mu(x)$ est dans B si

1) pour tout $t \in I$, la fonction $x \in \Omega \mapsto f(t,x)$ est mesurable,

2) pour presque tout $x \in \Omega$, la fonction $t \in I \mapsto f(t,x)$ est dans B,

3) il existe $g \in L^1(\Omega)$ vérifiant $\|f(\cdot,x)\|_B \leqslant g(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$.

Peut-on caractériser tous les espaces de Banach B de fonctions sur I qui ont la propriété de *régularité sous* $\int$? Dans l'article du même auteur dans la présente revue (134-2), on montre

- que si B a une propriété appelée *séquentielle caractérisabilité* (définition 2 et proposition 8) alors B a la propriété de *régularité sous $\int$*,
- que l'espace $B = \mathcal{L}^\infty([0,1])$ des fonctions mesurables bornées sur $[0,1]$ n'a pas la propriété de *régularité sous $\int$* (partie 5).

3. Asymptotique

Q565 (116-4) *auteur : RMS*

Soit $T(n)$ le nombre de Bell d'indice n : $T(n) = \mathrm{e}^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$. Dans R506 (116-4) on établit que $T(n) \sim f(n)$ où

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{\ln x}} w(x)^x e^{w(x)-x-1},$$

et $w : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est la fonction réciproque de $y \mapsto y \ln y$.
Estimer le terme suivant du développement asymptotique.

Q776 (113-1 et 123-1) *auteur : Jean-Pierre Étienne*

Soit la série entière $f_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^m}$ pour $m = 2, 3, \ldots$. Trouver un équivalent simple en $-\infty$ de f_m.

NDLR. On trouve dans l'article de Jean-Christophe Feauveau *« quelques équivalents simples de sommes de séries entières »* (107-5) l'équivalent suivant de f_m en $+\infty$, comme cas particulier d'une formule plus générale :

$$f_m(x) \sim (2\pi)^{(1-m)/2} m^{-1/2} x^{(1-m)(2m)} e^{mx^{1/m}}.$$

Q839 (105-9 et 124-4) *auteur : RMS*

Soit q un nombre réel strictement compris entre -1 et 1. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution de l'équation fonctionnelle

$$f(x) = (1 - qx) f(qx).$$

Dans l'exercice d'oral 21 (103-5), on demande de prouver l'existence d'un développement en série entière de f sur $\mathbb{R}$.
On demande ici d'étudier le comportement asymptotique de f en $+\infty$.

Q855 (125-2) *auteur : Denis Lepelletier*

On considère les suites réelles (u_n) données par la relation de récurrence d'ordre deux :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{\lambda u_n}{n+2}.$$

Dans la réponse R773 (124-1) il a été prouvé que l'espace des solutions dispose d'une base $\{(v_n), (w_n)\}$, où (v_n) est équivalente à n^λ et (w_n) à $\frac{(-1)^n \lambda^n}{n! n^{\lambda+1}}$.

Poursuivre le développement de la suite prépondérante (v_n). Plus précisément établir l'existence d'une suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout entier naturel N

$$v_n = n^\lambda + \alpha_1 n^{\lambda-1} + \alpha_2 n^{\lambda-2} + \cdots + \alpha_N n^{\lambda-N} + o(n^{\lambda-N}).$$

Q865(116-2 et 125-3) *auteur : RMS*

Cette question faisait suite à l'exercice d'oral corrigé 2 (113-4) puis la réponse R469 (116-2).

Pour $n \geqslant 2$, on considère le polynôme $P_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

Dans R469 on a montré les résultats suivants.

(i) Le polynôme P_n admet une unique racine réelle positive notée ρ_n. La suite (ρ_n) est croissante et tend vers 2. Elle admet pour tout N un développement asymptotique du type :

$$\rho_n = 2\left(1 - \sum_{k=0}^{N} A_k(n) u_n^{k+1} + o\left(u_n^{N+1}\right)\right)$$

avec $u_n = 2^{-n-1}$, les A_k étant des polynômes.

(ii) On note r_n le plus petit des modules des racines de P_n. La suite (r_n) tend vers 1.

(iii) De plus $\lim\left(2n\left(1 - r_{2n}\right)\right) = \ln 3$.

a) Peut-on donner une formule globale pour chaque polynôme A_k ?

b) Peut-on affirmer : $\rho_n = 2\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} A_k(n) u_n^{k+1}\right)$?

c) Peut-on affirmer : $\lim\left((2n+1)\left(1 - r_{2n+1}\right)\right) = \ln 3$?

Q1039(132-3) *auteur : Flavien Mabilat*

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^n$ est un polynôme réel ou complexe, on note

$$\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| \quad \text{et} \quad N(P) = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k| \ ;$$

et, pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$C_n = \sup_{\substack{P\in\mathbb{R}_n[X] \\ \|P\|_\infty = 1}} N(P).$$

Quelles estimations de C_n peut-on établir ? Par « estimation », on entend : minoration, majoration ; équivalent simple ; prépondérance sur et sous d'autres suites simples.

Q1040(132-3) *auteur : Richard Antetomaso*

À toute partie de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ on associe les deux fonctions $\varphi_A, \psi_A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{N}$ données par :

$$\varphi_A(x) = \operatorname{Card}(\{a \in A \ / \ a \leqslant x\} \text{ et } \psi_A(x) = \operatorname{Card}(\{(a,i) \in A \times \mathbb{N}^* \ / \ a^i \leqslant x\}.$$

a) Montrer que si $\ln x$ est négligeable devant $\varphi_A(x)$ en $+\infty$ alors $\psi_A(x) \sim \varphi_A(x)$.
b) En déduire un équivalent du n-ième nombre primaire.
c) Que peut-dire de ψ_A lorsque l'hypothèse de **a)** n'est pas satisfaite ?

Q1046(132-4) *auteur : RMS*

Dans l'exercice d'oral 116 de la liste de RMS 132 2, on demande d'étudier certaines propriétés des solutions de l'équation différentielle, définie sur $\mathbb{R}_+$:

$$y'' = \frac{8x^n}{(1+x^2)^2} y.$$

Étudier selon l'entier naturel n, le comportement asymptotique des solutions quand x tend vers $+\infty$.

Q1064(133-4) *auteur : Philippe Bonnet*
Dans l'exercice d'oral 651 dont la solution est parue dans RMS 133-3, on montrait que si (X_i) est une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant la loi géométrique de paramètre p et $R_n = \operatorname{card}(\{X_1, \ldots, X_n\}$, alors $\mathbb{E}(R_n)$ est équivalent à
$-\ln(n)/\ln(1-p)$ quand n tend vers $+\infty$.
Étudier l'existence d'un développement asymptotique de $\mathbb{E}(R_n)$ à la précision n^{-r} pour tout entier naturel r. Si le développement existe, peut-on le calculer explicitement ?

Q1066 (133-4) *auteur : Richard Antetomaso*
Voici l'exercice d'oral 83 corrigé dans RMS 133-3.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier relatif supérieur ou égal à x. On définit une suite $u \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $u_n = 2u_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 2$ qui est une puissance de 2, $u_n = \lceil (u_{n-1})/3 \rceil$ pour tout entier $n \geqslant 3$ qui est une puissance de 3, et enfin $u_n = u_{n-1}$ pour tout autre entier naturel $n \geqslant 1$. Montrer que u tend vers $+\infty$.

On complète l'énoncé par les questions suivantes.
a) Montrer que u_n est négligeable devant toute puissance positive de n.
b) Minorer u_n par une suite simple.
c) Préciser le comportement asymptotique de u_n.

Q1074 (134-2) *auteur : Bernard Randé*

Cette question fait suite à la réponse R1049 publiée dans le numéro 134-2.
On note $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des coefficients du développement en série entière de $f : z \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{z}{1-z}}$. Une étude asymptotique de (a_n) laisse envisager que $a_n = \mathcal{O}(n^{-\frac{3}{4}})$. Plus précisément, montrer d'abord

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\mathrm{e}}} a_n = \operatorname{Re} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2} \operatorname{cotan}\, t + 2\mathrm{i}nt\right) \mathrm{d}t.$$

Puis donner un équivalent de l'intégrale, avec un reste asymptotique le plus précis possible et obtenir ainsi une estimation asymptotique de a_n.

4. Topologie

Q701 (121-1) *auteur : Rafik Imekraz*

Soit $a \in]0,1[$; on considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0 et qui sont a-höldériennes de rapport 1. Muni de la convergence uniforme sur $[0,1]$, $\mathcal{C}$ est un compact convexe.
Peut-on exhiber des propriétés simples des points extrémaux de $\mathcal{C}$ et même peut-on les caractériser ?

Q748 (103-9 et 122-2) *auteur : Alain Pommellet*

Soit A une partie de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, connexe par arcs $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Si x et y sont deux points quelconques x et y de A on définit leur distance géodésique $d(x,y)$ comme la borne inférieure de l'ensemble des longueurs des arcs les joignant. On identifie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n^2}$. Déterminer la distance géodésique entre deux points dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, puis dans l'ensemble des matrices non régulières.

Q766 (113-2 et 122-4) *auteur : Bernard Randé*

Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable. Soit un entier $n > 0$. Pour tous n-uplets $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de réels et y réel, on pose

$$\delta(X,y) = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} |y - x_k|, \quad \text{puis} \quad \varphi(X) = \int_0^1 \delta(X, f(t))\mathrm{d}t.$$

Étudier le minimum de φ et l'ensemble des points où ce minimum est atteint. On pourra au besoin ajouter des hypothèses supplémentaires à f.

Le problème de Polytechnique 2002 MP 1 (pb 6960, 113-3) traite cette question pour $n = 1$.

Q781 (123-2) *auteur : Amine Marrakchi*

Soit G un groupe et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de G. On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est *séparable* s'il existe une famille $(t_i)_{i \in I}$ d'éléments de G tels que les $t_i A_i$ $(i \in I)$ sont deux à deux disjoints.
On suppose que G est compact. Soit $U = (U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de G telle que toute sous-famille finie de U est séparable, montrer alors que la famille U entière est séparable.
(On pourra supposer, si besoin est, que G est métrisable, I dénombrable etc.)

Q803 (116-1 et 123-4) *auteur : Romain Krust*

Soit une suite (a_n) réelle, à termes strictement positifs, décroissante et sommable. On note Σ l'ensemble des sommes de séries extraites (finies ou infinies) de cette suite.
Peut-on caractériser les suites de ce type qui sont telles que Σ est d'intérieur vide ?

Q805 (124-1) *auteur : Rafik Imekraz*

On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel. Pour toute norme N de $\mathbb{R}^2$, on définit la norme duale $N^\star$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad N^\star(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \dfrac{\langle x, y\rangle}{N(y)}$.
Peut-on caractériser les normes N telles qu'il existe $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ avec $N^\star = N \circ u$?

Q820 (113-4 et 124-2) *auteur : Alain Tissier*

À la suite de l'exercice d'oral corrigé 39 (113-4).
Soit C un compact convexe de $\mathbb{R}^2$ d'intérieur non vide. On note $\delta(C)$ le diamètre de C. Pour tout point P, on note $\mu(P, C)$ la moyenne des distances de P aux points de C. On pose ensuite $\rho(C) = \inf_P \mu(P, C)$.
Étudier les bornes de $\dfrac{\rho(C)}{\delta(C)}$ où C parcourt l'ensemble des compacts convexes de $\mathbb{R}^2$ d'intérieur non vide. L'exercice 39 montre que la borne inférieure est au moins égale à $\dfrac{1}{12}$.

Q867 (125-3) *auteur : Alain Rémondière*

On note E l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\exists M > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M.$$

On norme E en posant, pour $f \in E$, $N(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\|f^{(n)}\right\|_\infty$. On note, pour tout $\lambda \in [-1, 1]$, e_λ la fonction $x \mapsto e^{i\lambda x}$, puis F l'adhérence, au sens de N, de l'espace vectoriel engendré par $(e_\lambda)_{\lambda\in[-1,1]}$.
Existe-t-il un supplémentaire de F dans E fermé pour N et stable par dérivation ?

Q963 (128-4) *auteur : Bernard Randé*

Pour chaque $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^3$ on note $|||.|||$ la norme subordonnée associée.
Pour tout p réel, on note $A(p)$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & p \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Dans l'exercice d'oral 997 de RMS 128-2, $\|.\|$ étant l'une des trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^3$, on étudie l'ensemble des p tels que $|||A(p)||| \leqslant 1$.
a) Expliciter une norme $\|.\|$ telle que $|||A(p)||| > 1$ pour tout p.
b) Peut-on caractériser de telles normes ?

Q978 (129-3) *auteur : Vincent Rohart*

Soit $n \geqslant 1$. Pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$ on note $\|P\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\mathrm{d}t$ et $\|P\|_\infty = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |P(x)|$.
Trouver $\displaystyle\inf_{P\in\mathbb{R}_n[X]} \frac{\|P\|_1}{\|P\|_\infty}$.

Q1057(133-2) *auteur : Franck Taieb et Alain Tissier*

Cette question suit la réponse R1004 publiée dans RMS 133-2.
Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $S(A)$ la classe de similitude de A. On note $\delta(A) = \displaystyle\inf_{B\in S(A)} \|B\|$.
Dans R1004 on prouve que si $\|.\|$ est $M \mapsto \sqrt{\mathrm{tr}(M^*M)}$ alors $\delta(A)$ n'est autre que la somme des modules des valeurs propres de A et que les matrices de $\overline{S(A)}$ minimisant la norme sont les matrices normales ayant les mêmes valeurs propres que A.

Plus généralement on demande quelles sont les matrices B de $\overline{S(A)}$ pour lesquelles il existe une norme $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que B minimise cette norme ?

Q1068(134-1) *auteur : Jean-Baptiste Hiriart-Urruty*

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes, différentiables et bornées inférieurement. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $\|.\|$. On désigne par $(\nabla f)(x)$ (resp. $(\nabla g)(x)$) le vecteur gradient de f (resp. de g) en x. Montrer que si $\|(\nabla f)(x)\| = \|(\nabla g)(x)\|$ pour tout x alors la fonction $f - g$ est constante. L'hypothèse de convexité de f et g est-elle nécessaire ?

5. Probabilités

Q788 (123-3) *auteur : Rafik Imekraz*

Voici une version probabilisée de la question 675 (voir R675, 122-1).
Soit $n \geqslant 2$ et $M_1, \ldots, M_n$ des points aléatoires parcourant de manière uniforme et indépendante le cercle unité $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$. Soit D_n la variable aléatoire $D_n = \max\limits_{M \in \mathbb{U}} \prod\limits_{j=1}^{n} MM_j$. D'après la réponse R675, $\mathbb{P}(D \in [2, 2^n]) = 1$.

Donner des estimations de $\mathbb{P}(D_n \geqslant \alpha)$ lorsque

a) α est fixé et n tend vers $+\infty$ **b)** n est fixé et α tend vers 2^n.

Q793 (123-3) *auteur : RMS*

À la suite de l'exercice d'oral corrigé 24 (121-4).
On note E_n l'ensemble des matrices carrées d'ordre n dont tous les coefficients sont 1 ou -1. Dans l'exercice mentionné on montre que la moyenne des déterminants des éléments de E_n est nulle et que moyenne des carrés de ces déterminants est $n!$.
Étudier la moyenne des valeurs absolues de ces déterminants.

Q838 (124-4) *auteur : RMS*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, normé par une norme usuelle. Pour toute partie finie Σ de R^n, on note $d_\Sigma(x)$ la distance de x à Σ. On note

$$m_k = \inf \Big\{ \mathbb{E}\big(d_\Sigma(X)\big), \operatorname{Card} \Sigma = k \Big\}.$$

Dans l'exercice d'oral corrigé 144 (124-4) il est prouvé que si X suit la loi uniforme sur $[-1, 1]^n$ et que la norme utilisée est la norme euclidienne standard, alors $k^{1/n} m_k$ tend vers 2^{-n} lorsque k tend vers l'infini.
Peut-on obtenir des résultats plus généraux ? Au mieux, l'existence de la limite de $k^{1/n} m_k$ est-elle garantie pour toute variable intégrable X et pour toute norme sur $\mathbb{R}^n$?

Q877 (126-1) *auteur : Rafik Imekraz*

On considère une suite $(A_n)_{n \geqslant 0}$ de matrices carrées de même taille d, aléatoires, indépendantes de même loi et ayant un moment d'ordre 1. On dira que la propriété (P) est vérifiée s'il existe $c \in \,]0, 1[$ tel que pour chaque entier $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathbb{P}\left(\det \left(\sum_{k=0}^{p} A_k \right) = 0 \right) \geqslant c$$

a) Montrer que si les matrices A_n sont symétriques positives et si la propriété (P) est vérifiée alors il existe $X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ tel que presque sûrement $A_n X = 0$ pour tout n.

b) Quitte à rajouter des hypothèses sur la suite (A_n), la propriété (P) peut-elle impliquer l'existence de $X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ tel que presque sûrement $A_n X = 0$ pour tout n ?

Q975 (129-3) *auteur : Jean-Denis Eiden*

Cette question est issue de l'exercice d'oral 169 corrigé dans la présente revue.
Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur Z pour qu'il existe X et Y, variables aléatoires indépendantes non presque sûrement constantes telles que $Z = XY$.
b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur Z pour qu'il existe X et Y, variables aléatoires indépendantes et de même loi, telles que $Z = XY$.

Q1036(132-2) *auteur : Franck Taieb*

On considère le processus aléatoire suivant, qui représente l'organisation d'un Noël secret auquel participent n personnes. Au départ, un sac contient un ensemble S_1 de n boules numérotées de 1 à n. Puis, à chaque temps $t = 1 \dots n-1$:

- si $t \in S_t$, X_t est pris sous loi uniforme dans $S_t \setminus \{t\}$: la personne t tire dans le sac la boule dont le numéro est celui de la personne à qui elle fait son cadeau ; elle en tire une autre et remet la sienne si elle s'est désignée elle-même.
- si $t \notin S_t$, X_t est pris sous loi uniforme dans S_t.
  Puis $S_{t+1} = S_t \setminus \{X_t\}$.

On recommence ainsi jusqu'à $t = n-1$; S_n est alors un singleton. Le processus de tirage est concluant lorsque $S_n \neq \{n\}$.
a) Peut-on calculer la probabilité que le processus de tirage soit concluant ? Ou obtenir un algorithme de calcul ? Un équivalent lorsque $n \to \infty$?
b) Conditionnellement au fait que le tirage soit concluant, le tirage n'est pas uniforme sur l'ensemble des permutations sans point fixe. Peut-on déterminer la loi conditionnelle du tirage ?

Q1048(133-1) *auteur : Julien Bernis*
Cette question fait suite à la réponse R859 parue dans le RMS 133-1.
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et indépendantes de même loi de Bernoulli, c'est-à-dire de loi uniforme sur $\{0, 1\}$. On considère la version aléatoire de la suite de Fibonacci (u_n) définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + X_n u_{n-1}, \qquad u_0 = u_1 > 0$$

Il a été montré que : $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ converge presque sûrement vers une constante universelle $K \simeq 1,33\dots$ tandis que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge en loi vers une loi discrète à support dans $[1, 2]$. On peut donc naturellement se demander si pour une certaine constante $A > 0$ (peut-être $A = 1$) et une suite positive (ω_n) on aurait une sorte de théorème central limite, c'est-à-dire une convergence en loi remarquable de la variable aléatoire $\dfrac{u_n - AK^n}{\omega_n}$? (on souhaite naturellement éviter le cas où (ω_n) croît trop vite de sorte que la loi limite ne pourrait être qu'une masse de Dirac).

Q1079 (134-3) *auteur : Guillaume Bignon* Dans l'exercice d'oral 169 corrigé dans RMS 130 3, on lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que le nombre de Pile soit égal au double du nombre de Face et on demande la probabilité de ne jamais s'arrêter. Dans la question Q1012 on impose la condition d'arrêt différemment : « le nombre de Pile est *strictement supérieur* au double du nombre de Face. Dans la réponse R1012 (voir ci-après), Guillaume Bignon, après avoir résolu la question posée, étudie une généralisation.
« Soit un entier $p \geqslant 2$. On arrête la partie quand le nombre de piles dépasse strictement p fois le nombre de faces. Quelle est la probabilité π_p pour que la partie s'arrête ? »
Peut-on trouver une formule close pour π_p ? Exemple $\pi_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. La formule donnée dans R1012 utilise la somme d'une série.
On réalise une succession infinie de lancers de pièce équilibrée, et on note X le nombre de fois où le nombre de Pile a dépassé strictement le double du nombre de Face. Calculer la probabilité pour que X soit finie et éventuellement son espérance. C'est une généralisation de la question de départ dans laquelle on calculait la probabilité pour que X ne soit pas nulle. Pour éviter toute confusion, si on obtient (Pile, Pile, Face, Pile) puis que des Pile alors $X = 2$.

6. Géométrie

Q804 (117-1 et 123-4) *auteur : Yves Duval*

On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Pour toute partie finie X de S ayant au moins deux éléments, on note $\delta(X)$ le minimum de la distance entre deux points de X ; on note $d(n)$ la valeur maximale de $\delta(X)$, X étant constituée de n points de S.
a) On suppose qu'il existe un polyèdre régulier à n sommets inscrit dans S. Est-il vrai que $d(n)$ est la longueur du côté de ce polyèdre régulier ?
b) Étudier la limite de $\left(\sqrt{n}\, d(n)\right)$.

Q832 (124-4) *auteur : Rafik Imekraz*

Considérons un dodécagone régulier $\mathcal{P}$ et formons les douze carrés « dirigés »vers le centre de $\mathcal{P}$ et dont les côtés sont des côtés de $\mathcal{P}$. Les douze carrés obtenus vérifient les deux propriétés suivantes :

- deux carrés différents n'ont pas de côté commun ;
- un sommet appartient à exactement deux carrés

Quels sont les entiers naturels n tels qu'on puisse disposer n carrés isométriques dans le plan euclidien avec les deux propriétés précédentes ?

Q896 (126-3) *auteur : Saab Abou Jaoudé*

Dans le plan réel affine orienté, muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ direct, on considère n demi-droites distinctes ayant toutes O pour origine. Elles découpent le plan en n zones $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ qui sont les composantes connexes du complémentaire de la réunion de ces demi-droites. On suppose qu'aucune de ces zones n'inclut un demi-plan ouvert.
On appelle ligne polygonale convexe directe à p côtés toute suite $(A_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ de période p, tel que $\det(\overrightarrow{A_kA_{k+1}}, \overrightarrow{A_kA_\ell}) > 0$ pour tous k, ℓ compris entre 0 et $p-1$ tels que ℓ diffère de k et de $k+1$. On note M_k le point tel que $\overrightarrow{OM_k} = \overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ et on suppose que pour tout k, il n'existe aucun j tel que M_{k+1} et M_k sont tous deux adhérents à Z_j.
Montrer que p est au plus égal à n.

Q971 (129-2) *auteur : Alain Tissier*

Construire les ensembles de quatre points distincts et non alignés du plan euclidien tels que chaque distance entre deux de ces points est un entier.
Dans l'exercice 163 de RMS 125-2, résolu dans RMS 125-3, on montre que ces distances ne peuvent être toutes des entiers impairs. Par ailleurs, l'ouvrage « Problèmes clefs pour mathématiques supérieures » de H. Gianella, R. Krust, F. Taïeb, N. Tosel chez Calvage & Mounet donne un procédé de construction permettant d'établir des solutions qui sont des quadrilatères inscriptibles ou des ensembles constitués par des triangles et leur centre de cercle circonscrit.

Il s'agit de compléter la liste.

Q992 (130-1) *auteur : Richard Antetomaso*

Dans l'article de la présente Revue « Nombre de points entiers sur le graphe d'une fonction convexe », on prouve (proposition 2) que le nombre de points entiers sur un cercle de rayon $R > 0$ du plan $\mathbb{R}^2$ est au plus $\mathcal{O}(R^{2/3})$.
On demande d'améliorer cette estimation.

Q1006 (130-4) *auteur : Denis Lepelletier*

On donne dans le plan affine réel cinq points A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, trois à trois non alignés. On construit les points suivants, éventuellement à l'infini : A_2 intersection des droites (B_1D_1), (C_1E_1) ; B_2 intersection de (C_1E_1), (D_1A_1), et de même C_2, D_2, E_2 par permutation circulaire.
a) Montrer que A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 sont trois à trois non alignés.
En itérant la construction on obtient des suites de points $(A_n)_n$, $(B_n)_n$, $\ldots$, $(E_n)_n$.
b) On suppose que le pentagone initial $A_1\,B_1\,C_1\,D_1\,E_1$ est convexe. Montrer que les cinq suites convergent vers un même point.

7. Maths discrètes - Informatique

Q668 (101-4 et 120-1) *auteur : RMS*

Soit n un entier au moins égal à 3. Pour tout $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ on pose

$$P(X) = (|x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|, \dots, |x_{n-1} - x_n|, |x_n - x_1|).$$

On note P^q l'itéré q^e de P. Étudier la suite $(P^q(X))_{q\in\mathbb{N}}$ pour un X donné.
NDLR. Le cas $n = 4$ est étudié dans American Mathematical Monthly juin-juillet 1984 p.360 et dans RMS 100-10. On montre que $P^m(X) = (0, 0, 0, 0)$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$ sauf si $P(X) = (1, a, a^2, a^3)$ à une transformation simple près, $a - 1$ étant la racine réelle de $X^3 + 2X^2 - 2$.
Toute solution partielle englobant le cas $n = 5$ sera bienvenue.

Q728 (121-4) *auteur : Alain Tissier*

Deux joueurs A et B s'affrontent ainsi. Au départ un bâton de longueur n cm. Puis A casse ce bâton en deux morceaux de longueurs n' et n'' cm, n' et n'' étant des entiers non nuls et distincts. À son tour B casse de la même façon un des deux morceaux, toujours en deux morceaux de longueurs s'exprimant en nombres entiers de cm non nuls et distincts. Les deux joueurs jouent ainsi alternativement jusqu'à ce que ce soit devenu impossible. Alors le bâton initial est cassé en x bouts de 1 cm et y bouts de 2 cm.

- si $x > y$, le dernier ayant joué est vainqueur;
- si $x < y$, c'est son adversaire qui est vainqueur;
- si $x = y$, la partie est déclarée nulle

On suppose que A et B jouent au mieux. Est-il vrai ou faux que pour tout n, A gagne si $n \equiv 2 \bmod 3$, B gagne si $n \equiv 1 \bmod 3$ et que la partie est nulle si $n \equiv 0 \bmod 3$?

Q764 (122-4) *auteur : Franck Taieb*

a) On considère un ensemble $X = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$ de réels, et $k \leqslant n$. Pour toute partie F de X on note $\delta(X, F) = \max\limits_{x\in X} \min\limits_{y\in F} |x - y|$. Donner un algorithme efficace pour calculer la partie F de cardinal k telle que $\delta(X, F)$ soit minimale.
b) Reprendre la question précédente lorsque X est une partie de cardinal n dans un espace métrique (X est donc non ordonnée).

Q980 (129-3) *auteur : Alain Tissier*

Cette question fait suite à l'exercice d'oral 966 corrigé dans RMS 129-3.
On note N l'ensemble des entiers au moins égaux à 2. On note A l'ensemble des carrés des éléments de N. On considère un entier $n \geqslant 3$. On note

$$f_n : N \to N \text{ la fonction qui envoie } x \text{ sur } \sqrt{x} \text{ si } x \in A \text{ et } x + n \text{ si } x \notin A.$$

On note B_n l'ensemble des éléments de N qui sont congrus modulo n à un élément de A. Soit a un élément de N. Dans l'exercice en question on considère la suite de terme général $u_k = f^{\circ k}(a)$. On montre que ou bien il existe k tel que $u_k \notin B_n$ et la suite (u_k) tend vers $+\infty$ ou bien tous les u_k sont dans B_n et la suite (u_k) est ultimement périodique.
On note C_n l'ensemble des a de A tels que la suite (u_k) est ultimement périodique. On note $g_n : B_n \to N$ l'application $x \mapsto y$ où y est le plus petit élément de N tel que $y^2 - x$ est positif et divisible par n. Si $a \in C_n$ la suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = a$ puis $a_{j+1} = g_n(a_j)$ est bien définie et est extraite de la suite (u_k). On ramène ainsi l'étude de la suite (u_k) à la recherche des cycles de g_n.
a) Montrer que tout cycle de g_n est inclus dans $[\![2, n]\!]$. Plus précisément montrer que tout cycle de g_n qui n'est pas (n) est inclus dans $[\![2, n-2]\!]$.
b) Quels sont les n tels que $g_n(n) = n$? Plus généralement étudier les couples (a, n) tels que a est un point fixe de g_n.
c) On suppose n premier. Étudier l'existence de cycles de longueurs 1, 2, 3 , … pour g_n.
Le lecteur intéressé pourra ajouter d'autres questions et si possible y répondre.

Q1038 (132-3) *auteur : Colas Bardavid*

À la suite de l'exercice d'oral corrigé 227 (RMS 111-9) et de la réponse R712 publiée dans RMS 132-2. On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})$ vérifie $\mathcal{P}(n, h, k)$ si

- A est carrée d'ordre n ;
- $a_{i,j} \in \{0, 1\}$ pour tous i, j ;
- il existe, pour tout j, exactement $h + k$ indices i tels que $a_{i,j} = 1$;
- il existe, pour tous $j < j'$ exactement k indices i tels que et $a_{i,j} = a_{i,j'} = 1$;

Dans la solution de l'exercice, on prouve que si A vérifie $\mathcal{P}(n, h, k)$ alors ${}^tA$ aussi et :

$$(1) \qquad nh = (h + k)^2 - k.$$

On considère trois entiers naturels n, h, k vérifiant (1) tels que $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 1$.
Donner des conditions suffisantes pour qu'il existe une matrice vérifiant $\mathcal{P}(n, h, k)$.

Un contre-exemple a été donné dans R712 :

$$n \geqslant 4, h = n - 2, k = 1.$$

Q1042 (132-3) *auteur : Moubinool Omarjee*

Soit un entier $n \geqslant 3$. On note E_n l'ensemble des entiers strictement positifs qui s'écrivent sous la forme

$$(a_1 - 1/a_2)(a_2 - 1/a_3)\cdots(a_{n-1} - 1/a_n)(a_n - 1/a_1)$$

où les a_i sont des entiers strictement positifs.

Dans un exercice de la sélection roumaine 1987 pour l'olympiade internationale de mathématiques on montre que E_3 possède 21 comme élément unique.
Étudier l'ensemble E_n. Est-il non vide ? fini ?

Q1045 (132-4) *auteur : RMS*

C'est le numéro 1 de la liste des exercices d'oral publiés dans la RMS 132-2. Le texte de la question **b)** est modifié. Soit $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de 0 et 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle n-bloc de a tout n-uplet $(a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n-1})$.
a) On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que le nombre de m-blocs de a est majoré par m. Montrer que a est périodique.
b) Quelles sont les suites a apériodiques dont le nombre de m-blocs est majoré par $m+1$?

Q1062 (133-3) *auteur : Rafik Imekraz*

Dans la réponse R1001 présente dans cette revue, on étudie les solutions de l'équation diophantienne (E_n) :

$$x_1x_2\cdots x_n = 2(x_1-2)(x_2-2)\cdots(x_n-2),$$

où $5 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \cdots \leqslant x_n$. Voici trois questions non résolues.

a) Il est établi en fin de réponse que la suite $(x_1, \dots, x_n)$ donnée par $x_1 = 5$, puis $x_{i+1} = x_i^2 - 3x_i + 3$ pour $i < n-1$ et $x_n = x_{n-1}^2 - 3x_{n-1} + 2$ est solution de (E_n) et on a de fortes raisons de penser qu'elle maximise le produit $x_1x_2\cdots x_n$ parmi toutes les solutions de (E_n). Cette conjecture est-elle vraie ?

b) Peut-on déterminer la solution de (E_n) minimisant le produit $x_1x_2\cdots x_n$?

c) Il est établi que le nombre s_n de solutions de (E_n) est au moins égal à 2^n. Trouver mieux ; la croissance de (s_n) est-elle géométrique ?

Q1071(134-1) *auteur : Omar Sonebi*

Dans un exercice des olympiades internationales de maths 1983 à Paris, on demande s'il est possible de choisir 1983 entiers naturels distincts non nuls : $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{1983}$ tous inférieurs ou égaux à 10^5 tels aucun triplet $x_i < x_j < x_k$ ne soit en progression arithmétique.

a) Soit un entier $n \geqslant 2$. Déterminer $f(n)$, la valeur maximale de m telle qu'il existe k entiers naturels $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m \geqslant n)$ tels que aucun triplet $x_i < x_j < x_k$ ne forme une sous-suite arithmétique. Par exemple : $f(2) = 0$, $f(3) = 3$ et $f(4) = 4$ etc.

b) Peut-on généraliser en remplaçant « triplet » par « quadruplet » ou « quintuplet » ?

1080 (134-3) *auteur : Moubinool Omarjee*

Soit A un nombre entier plus grand que 10. On note $d(A)$ le déterminant de la matrice circulante de première ligne $(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0)$ où $a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0)$ est l'écriture en base 10 de A, a_{n-1} n'étant pas nul. Exemples : $d(137) = d(731) = 308$; $d(1357) = -2048$.
On montre que $d(629) = 629$.
Étudier les points fixes de d.

8. Algèbre générale - Arithmétique

Q604 (101-2 et 118-1) *auteur : Pierre-Jean Desnoux*

Soit A, B des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, premiers entre eux, et U et V des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $d^\circ U < d^\circ B$ et $AU + BV = 1$.
Soit m et n des entiers naturels non nuls. Expliciter les couples $(U_{m,n}, V_{m,n})$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $d^\circ U_{m,n} < d^\circ B^n$ et $A^m U_{m,n} + B^n V_{m,n} = 1$.

Q814 (124-2) *auteur : Rafik Imekraz*

Soit un entier $n \geqslant 2$ et un ensemble I d'entiers strictement positifs. On dit que I vérifie (P_n) si le système d'équations en $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$: $\forall p \in I,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^p = n$ n'admet pas d'autre solution que $(1, \ldots, 1)$.
a) Montrer que les parties minimales I vérifiant (P_n) sont finies. Que dire de leur cardinal ? Peut-on les caractériser simplement ?
b) Quelles sont les parties J qui vérifient (P_n) pour tout $n \geqslant 2$?

Q831 (102-4 et 124-3) *auteur : Richard André-Jeannin*

On note $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ les polynômes symétriques élémentaires de $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Pour $m = 2, 3, \ldots$, peut-on expliciter les $\Sigma_i(X_1^m, X_2^m, \ldots, X_n^m)$?

Q834 (124-4, fusionnée avec Q716) *auteurs : Éric Pité et Clément Deslandes*

Dans l'exercice d'oral corrigé 5 (118-4) on montre qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ possède exactement n racines réelles distinctes, mais sans donner de formule explicite.
Existe-t-il une suite de rationnels non nuls $(a_n)_{n\in N}$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, le polynôme $a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ est scindé et à racines simples sur $\mathbb{Q}$?
Si OUI peut-on expliciter une telle suite ?

Q879 (126-1) *auteur : Omar Sonebi*

Déterminer les polynômes P unitaires complexes tels que l'ensemble des entiers n tels que $P(n)$ est une puissance parfaite est infini.
Cette question fait suite à l'exercice 2 résolu dans RMS 112-4. Dans la solution de Simon-Pierre Evry, on montre que si P est un polynôme réel non nul tel que, pour un certain entier $n > 0$, $P(k)$ est, pour tout entier naturel k, du type ℓ^n où ℓ est un entier naturel, alors P est lui-même du type Q^n où Q est un polynôme réel.

Q938 (127-4) *auteur : Éric Pité*

Soit n un entier au moins égal à deux. Dans le groupe S_n des permutations d'ordre n, on note $f(n,k)$ le nombre d'éléments qui sont des puissances k^e. Soit p et q des nombres premiers diviseurs de $n!$ tels que $p < q$. Est-il vrai que $f(n,p) < f(n,q)$?

Q947 (128-1) *auteur : Richard Antetomaso*

Caractériser les couples (G, f) où G est un groupe fini d'ordre impair et f, un automorphisme involutif de G.

Q948 (128-2) *auteur : Jean-Baptiste Hiriart-Urruty*

Soit P une fonction polynomiale de deux variables et de degré d. On note K le quart de plan $[0, +\infty[^2$. On étudie la question suivante : si P est bornée inférieurement sur K, alors cette borne inférieure est-elle atteinte ? Voici ce que nous en savons :

Si $d = 1$, la réponse est clairement OUI.

Si $d = 2$, la réponse est également OUI. Cela demande un peu plus de travail. Le résultat général, connu sous le nom de théorème de Frank & Wolfe en Optimisation s'énonce comme suit : si une fonction quadratique de n variables est bornée inférieurement sur un polyèdre convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, alors cette borne inférieure est atteinte.

Si $d = 4$, la réponse est NON ; un contre-exemple est :

$$P(x, y) = x + (xy - 1)^2.$$

Traiter élémentairement le cas $d = 3$.

Q995 (130-2) *auteur : Omar Sonebi*

a) Peut-on caractériser les polynômes unitaires A à coefficients entiers tels que pour tout p premier il existe un entier a tel que p divise $P(a)$?
b) Peut-on caractériser les polynômes A à coefficients entiers tels que pour tout n entier il existe un entier a tel que n divise $P(a)$?

Q1003 (130-4) *auteur : Flavien Mabilat*

On montre classiquement qu'un polynôme P à coefficients réels ne prenant que des valeurs positives s'écrit sous la forme $A^2 + B^2$ où A et B sont dans $\mathbb{R}[X]$.
Trouver des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour qu'un polynôme Q à coefficients rationnels s'écrive sous la forme $A^2 + B^2$ où A et B sont dans $\mathbb{Q}[X]$.

Q1021 (131-3) *auteur : Adrien Reisner*

Soit G un groupe fini non abélien. Quels sont les éléments de G que l'on peut écrire comme produits de tous les éléments de G dans un ordre quelconque, chaque élément apparaissant exactement une fois ? Traiter en particulier l'exemple $G = \mathfrak{S}_n$.
L'exercice d'oral 6 dont la solution paraît dans RMS 131-3 traite le cas $G = \mathfrak{S}_3$.

Q1037(132-2) *auteur : Alain Tissier*

Soit K un corps. On note $(K^*)^{[2]}$ l'ensemble des carrés des éléments non nuls de K. Une racine carrée sur K^* est un morphisme de groupes φ de $(K^*)^{[2]}$ dans K^* tel que $\varphi(x)^2 = x$ pour tout $x \in (K^*)^{[2]}$.
Dans l'exercice d'oral 13 corrigé (RMS 128) on étudie pour $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'existence et l'unicité d'une fonction racine carrée. En fait on prouve qu'il en existe une et une seule si $K = \mathbb{R}$, K est de caractéristique 2, K est fini de cardinal congru à -1 modulo 4. Il n'en existe aucune si $K = \mathbb{C}$, K est fini de cardinal congru à 1 modulo 4, K est de caractéristique p congru à 1 modulo 4, et plus généralement, K possède un élément dont le carré est -1.
Voici quelques compléments demandés.
a) Un sous-corps K de $\mathbb{R}$ possède au moins une racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $(K^*)^{[2]}$. Existe-t-il un sous-corps strict de $\mathbb{R}$ ne possédant pas d'autre racine carrée ?
b) Soit K une extension quadratique de $\mathbb{Q}$, réelle ou non et ne contenant pas i. Construire les racines carrées sur K.
c) Existe-t-il un corps ne contenant pas d'élément de carré -1 et ne possédant aucune racine carrée ?

Q1041(132-3) *auteur : Omar Sonebi*

La suite de terme général $a_n = 3^n \bmod 2^n$ tend-elle vers $+\infty$?

Q1043(132-4) *auteur : Omar Sonebi*

On dit qu'un entier $n > 1$ est un nombre puissant si, pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise aussi n.
a) Montrer qu'il existe une séquence de n entiers naturels consécutifs ne contenant aucun nombre puissant.
b) Mieux encore : montrer qu'il existe une séquence de n entiers naturels consécutifs ne contenant aucun nombre qui soit somme de deux nombres puissants.
c) Peut-on encore améliorer le résultat de b) ?

Q1070(134-1) *auteur : Moubinool Omarjee*
Voici le problème 3, jour 1 de IMC 2023 Bulgarie International Mathematics Competition.
Déterminer les polynômes réels $P(x, y)$ vérifiant pour tous réels x, y, z, t :

$$P(x, y)P(z, t) = P(xz - yt, xt + yz).$$

Voici maintenant une proposition avec quatre variables. Déterminer tous les polynômes réels $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ vérifiant pour tous réels $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$:

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4)P(y_1, y_2, y_3, y_4) = P(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

où : $z_1 = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4$, $z_2 = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3$, $z_3 = x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2$ et $z_4 = x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1$.